MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 3

1. A Topologia Fraca*

1. Dado X um espaço normado X, mostre que $(X^*, \sigma(X^*, X))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo de Hausdorff.

2. Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço normado, $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$. Mostre que existem $y_1, \ldots, y_m \in X$ e $\delta > 0$ tais que $V\left(0; y_1, \ldots, y_m; \delta\right) \subset V(0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ e $\left\{y_1, \ldots, y_m\right\}$ é linearmente independente.

3. Seja X um espaço normado (incompleto) de dimensão infinita enumerável e seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base algébrica de X. Dados $m, n \geq 1$, considere $V_n^m = V\left(0; x_1, \ldots, x_n; \frac{1}{m}\right)$. Mostre que $(V_n^m)_{m,n\geq 1}$ é um sistema fundamental enumerável de w^*-vizinhanças da origem em X^*.

4. Sejam X um espaço normado que não é reflexivo e $x^{**} \in X^{**} \setminus J_X(X)$. Mostre que $\operatorname{Ker}(x^{**})$ é um subespaço fechado que não é w^*-fechado.

5. Sejam X e Y espaços normados e considere o operador linear $\mathscr{A} : \mathscr{L}(X, Y) \to \mathscr{L}(Y^*, X^*)$ dado por $\mathscr{A}(T) = T^*$. Mostre que $\mathscr{A}$ é sobrejetor se, e somente se, $X = \{0\}$ ou Y é reflexivo.

6. Dados dois espaços normados X e Y, considere $\mathscr{W}(X^*, Y) = \left\{T \in \mathscr{L}(X^*, Y) : T \text{ é } w^*\text{-}w\text{-contínuo}\right\}$.

a) Mostre que $\mathscr{W}(X^*, Y) = \left\{T \in \mathscr{L}(X^*, Y) : y^* \circ T \text{ é } w^*\text{-contínuo para todo } y^* \in Y^*\right\}$.

b) Dado $T \in \mathscr{L}(X^*, Y)$, mostre que $T \in \mathscr{W}(X^*, Y)$ se, e somente se, existe $S_T \in \mathscr{L}(Y^*, X)$ tal que $y^*(T(x^*)) = x^*(S_T(y^*))$ para todos $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$. Mostre também que a aplicação $T \mapsto S_T$ é uma isometria linear de $\mathscr{W}(X^*, Y)$ sobre $\mathscr{W}(Y^*, X)$.

c) Mostre que $\mathscr{W}(X^*, Y)$ é um subespaço fechado de $\mathscr{L}(X^*, Y)$ se, e somente se, X é de Banach ou $Y = \{0\}$.

d) Conclua que $\mathscr{W}(X^*, Y)$ é de Banach se, e somente se, $X = \{0\}$ ou $Y = \{0\}$ ou X e Y são ambos de Banach.

7. Dados X um espaço normado, A um subconjunto de X e B um subconjunto de X^*, os *anuladores de A e de B* são, respectivamente, os conjuntos

$$A^\perp = \left\{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\right\} \quad \text{e} \quad {}^\perp B = \left\{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x^* \in B\right\}.$$

Prove as seguintes afirmações:

a) $A^\perp$ é um subespaço w^*-fechado de X^*.

b) ${}^\perp B$ é um subespaço fechado de X.

c) Se Y é um subespaço de X, então ${}^\perp(Y^\perp) = \overline{Y}$.

d) Se Z é um subespaço de X^*, então $({}^\perp Z)^\perp = \overline{Z}^{w^*}$.

8. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. Prove as seguintes afirmações:

a) $\operatorname{Ker}(T) = {}^\perp(T^*(Y^*))$.

b) $\operatorname{Ker}(T^*) = (T(X))^\perp$.

c) T é injetor se, e somente se, $T^*(Y^*)$ é w^*-densa em X^*.

d) T^* é injetor se, e somente se, $T(X)$ é densa em Y.

9. Sejam X um espaço normado e A um subconjunto de X. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é w-compacto.

b) $J_X(A)$ é w^*-compacto.

c) A é limitado e $J_X(A)$ é w^*-fechado.

10. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n^*)_{n\geq 1}$ uma sequência w^*-de Cauchy em X^*. Mostre que $(x_n^*)_{n\geq 1}$ é limitada e w^*-convergente.

11. Seja $X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ e considere, para cada $n \geq 1$, $x_n^* = ne_n^*$ e $y_n^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^*$ em X^*.

a) Mostre que $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Conclua que $(x_n)_{n\geq 1}$ é w^*-limitada, mas não é limitada.

b) Mostre que $(y_n^*)_{n\geq 1}$ é w^*-de Cauchy, mas não é w^*-convergente.

12. Sejam X um espaço normado e $(x_j)_{j\in J}$ uma rede limitada em X.

a) Mostre que $(x_j)_{j\in J}$ admite sub-rede fracamente de Cauchy.

b) Suponha que X seja reflexivo. Mostre que $(x_j)_{j\in J}$ admite sub-rede fracamente convergente.

13. Sejam X um espaço normado, D um subconjunto denso de X e $(x_j^*)_{j\in J}$ uma rede em X^*.

a) Suponha que $(x_j^*)_{j\in J}$ seja limitada. Mostre que $x_j^* \xrightarrow{w^*} x^*$ se, e somente se, $x_j^*(x) \longrightarrow x^*(x)$ para todo $x \in D$.

b) Mostre, através de um exemplo, que a hipótese de $(x_j^*)_{j\in J}$ ser limitada não pode ser omitida no item anterior.