PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 6 DE SETEMBRO

LISTA 3

10)

g) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \in \mathbb{Q}\}$.

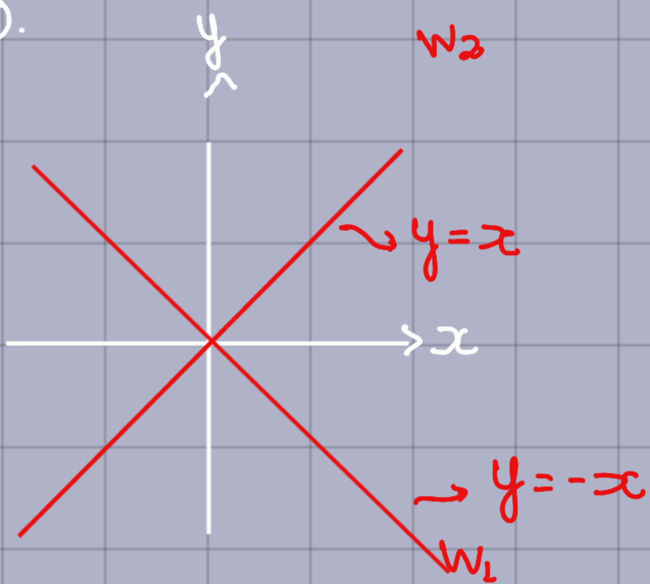
RESOLUÇÃO: W não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois, embora $(1,0,0) \in W$ (já que $1+0 = 1 \in \mathbb{Q}$), $\sqrt{2}(1,0,0) \notin W$ (já que $\sqrt{2}\cdot(1,0,0) = (\sqrt{2},0,0)$, e $\sqrt{2}+0 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

h) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$.

RESOLUÇÃO: W não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois, embora $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ pertençam a W (já que $1^2+0^2 = 1$, e $0^2+1^2 = 1$), $(1,0,0)+(0,1,0) \notin W$ (já que $(1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0)$, e $1^2+1^2 = 2 \neq 1$).

20) Sejam $W_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$, e $W_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y = 0\}$. Esboce W_1 e W_2 no mesmo sistema de coordenadas e verifique que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

RESOLUÇÃO.



De fato, $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, pois, embora $(-1,1), (1,1) \in W_1 \cup W_2$ (já que $(-1,1) \in W_1$, e $(1,1) \in W_2$), $(-1,1)+(1,1) \notin W_1 \cup W_2$ (já que $(-1,1)+(1,1)=(0,2)$, $(0,2) \notin W_1$, e $(0,2) \notin W_2$).

OBSERVAÇÃO:

- SUBESPAÇOS DE $\mathbb{R}^2$: $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ e as retas que passam pela origem.
- SUBESPAÇOS DE $\mathbb{R}^3$: $\{(0,0,0)\}$, $\mathbb{R}^3$, as retas que passam pela origem e os planos que passam pela origem.

$\Rightarrow$ É FÁCIL VER QUE OS CONJUNTOS CITADOS SÃO SUBESPAÇOS. O FATO DE QUE ESSES CONJUNTOS SÃO OS ÚNICOS SUBESPAÇOS, POR SUA VEZ, FICARÁ CLARO DAQUI A ALGUMAS AULAS.

2)

d) M_4: para cada $a \in \mathbb{R}$ e quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$,

$$a \odot [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] = a \odot (x_1 x_2, y_1 y_2) = ((x_1 x_2)^a, (y_1 y_2)^a)$$
$$= (x_1^a x_2^a, y_1^a y_2^a) = (x_1^a, y_1^a) \oplus (x_2^a, y_2^a)$$
$$= a \odot (x_1, y_1) + a \odot (x_2, y_2).$$

A_4: para quaisquer $x, y \in]0, +\infty[$,

$$(x, y) \oplus (x^{-1}, y^{-1}) = (x . x^{-1}, y y^{-1}) = (1, 1).$$

LISTA 2

11) Seja $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em $M_2(\mathbb{R})$ tal que $ad - bc \neq 0$.
Calcule A^{-1}.

RESOLUÇÃO.

PRIMEIRO CASO: $a \neq 0$

Como

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2' := L_2 - \frac{c}{a} L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2'' := \frac{a}{ad-bc} L_2'}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \underset{L_1''' := L_1'' - b L_2''}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1'''' := \frac{1}{a} \cdot L_1'''}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right)$$

a matriz A tem inversa, e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$(ad - bc = \det(A))$

SEGUNDO CASO : $a = 0$

Nesse caso, como $ad - bc \neq 0$, $bc \neq 0$, e, portanto, b e c são ambos diferentes de 0. Logo,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_2'' := \frac{1}{b} L_2'}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right) \underset{L_1''' := L_1'' - d L_2''}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} c & 0 & \frac{-d}{b} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_1'''' := \frac{1}{c} \cdot L_1'''}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right)$$

— o que, por sua vez, permite-nos concluir que A tem inversa, e que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{b}{bc} \\ \frac{c}{bc} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$