TEORIAS AXIOMÁTICAS FORMAIS DE 1ª ORDEM 1

Iole de Freitas Druck

Os elementos constitutivos de uma teoria axiomática de 1ª ordem são:

I. Uma linguagem formal de primeira ordem (apropriada ao que se quer dizer).

II. Os axiomas (proposições que descrevem as "verdades" iniciais).

III. Os teoremas (proposições que descrevem as "verdades" logicamente decorrentes dos axiomas).

I. LINGUAGEM FORMAL – SINTAXE

As linguagens formais são introduzidas para possibilitarem a redação de textos matemáticos ou lógicos de uma maneira precisa e concisa. Toda linguagem escrita é construída a partir de símbolos inicialmente fixados, com os quais se escreve sequências significativas: as palavras e as frases. No caso de português, italiano e demais línguas latinas ou anglo-saxônicas parte-se do alfabeto usual, já o russo é escrito com outro alfabeto enquanto que o chinês emprega ideogramas. Observe que espaço vazio, vírgula, parênteses, etc., também são recursos gráficos que intervêm na construção da escrita de uma linguagem, como fica evidente na programação de computadores. A descrição dos símbolos que as linguagens utilizam (e das regras de seu emprego correto) é do domínio da Sintaxe da linguagem. Importa observar ainda que, para a leitura de uma linguagem formal e para a troca de informações oralmente sobre o que ela descreve (o que é claramente imprescindível para seres humanos...), necessitamos de 'traduções' em língua materna para os seus símbolos. Na sequência tais 'traduções' são colocadas entre parêntese após os símbolos introduzidos.

Passemos à descrição da Sintaxe do Cálculo de Predicados de 1ª ordem. Nessa linguagem os seguintes tipos de símbolos são os empregados (dentro dos parênteses explicita-se como devem ser lidos).

Obs. Em livros de Lógica formal é usual adotar-se apenas 2 dos símbolos lógicos referidos como primitivos na cláusula A2 a seguir, para depois definir-se os demais a partir deles. Neste texto introdutório à Lógica formal adotamos a adoção de todos eles como primitivos para garantir maior proximidade com as ideias intuitivas que cada um representa e com a escrita, usualmente mais simplificada, das 'frases' formais (ou semiformais) que são utilizadas em textos matemáticos.

A)Símbolos lógicos:

A1) Símbolos de variáveis: x, y, z, x_1, x_2, ..., x_n, ..., u, v, w, t, ... (qualquer letra minúscula – do alfabeto do português – indexada ou não por números naturais)
A2) Conectivos lógicos: $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (se ... então, implica), $\leftrightarrow$ (se e só se, é equivalente a).
A3) Quantificadores: $\exists$ (existe), $\forall$ (para todo, qualquer).
A4) O símbolo da relação binária de igualdade: = (é igual a)

B)Símbolos próprios da linguagem:

B1) Símbolos de constante: Ci (i $\in$ I, onde I é um conjunto fixado previamente)
B2) Símbolos de predicados ou relacionais n-ários (n$\in\mathbb{N}$): P_j^n (– , – ,..., –) ($j \in$J)
B3) Símbolos de funções n-árias (n $\in$ $\mathbb{N}$): f_k^n(– , – ,..., –) ($k \in$ K)
(onde os conjuntos I, J e K dependem da linguagem particular que se quer descrever)

C)Símbolos auxiliares: ( ) [ ] {} . ...

Exemplos de linguagens apropriada a teorias axiomáticas particulares:

1) A linguagem das teorias algébricas de anéis ou de corpos ordenados tem como símbolos próprios os seguintes:
duas constantes: 0, 1
um predicado binário: < (x < y)
duas funções binárias +, × (x + y e x × y)
duas funções unárias: – , $^{-1}$ (–x e x^{-1})

2) A teoria dos conjuntos utiliza vários símbolos próprios. É sabido que a grande maioria dos símbolos pode ser definida a partir do símbolo $\in$, mas agora vamos listá-los todos aqui, classificando-os:
Constantes: ϕ, $\mathbb{N}$
Predicados: $\in$, $\subset$, $\supset$ (todos binários)
Funções: $\cup$, $\cap$, + , \ (binárias: + é união disjunta, \ é complemento relativo)
~ , $\wp$ (unárias: ~ é complemento e $\wp$ é partes).

Uma linguagem é utilizada para expressar ideias, significados. As palavras são os arranjos de símbolos significativos mais simples e que servem para indicar um objeto, uma qualidade, um sentimento, uma ação ou estado, enfim uma ideia unitária, não uma relação entre várias ideias. Para relacionar ideias são empregadas as frases, ou seja, arranjos de palavras que servem para fazer afirmações sobre algo: sem um verbo (também chamado de predicado, em português) não se constrói uma afirmação – é preciso minimamente um sujeito e um predicado para construir-se uma afirmação que faça algum sentido, ou seja, uma frase.

A sintaxe de uma linguagem é o conjunto de regras que determinam quais são as sequências finitas de seus símbolos que possibilitam escrever palavras e frases bem construídas ou consideradas linguisticamente corretas.

Nem todo tipo de palavra da linguagem comum interessa para uma linguagem formal que se propõem a expressar fatos matemáticos. Por exemplo: bonito, saudade, impressão – adjetivos ou substantivos que exprimem qualidades, que indicam sentimentos ou sensações, entre outras, não são relevantes para escrever Matemática. Uma linguagem formal utiliza palavras que representam, indicam ou denotam objetos (substantivos), alguns verbos (consubstanciados nos símbolos de predicados ou relacionais, e no símbolo =) e algumas palavras que servem para indicar/denotar 'operações' lógicas entre afirmações expressas nessa linguagem (que são os conectivos lógicos e os quantificadores), para obter novas afirmações da mesma linguagem.

Passemos agora à descrição, dentro da <u>Sintaxe das linguagens formais de 1ª ordem</u>, das regras de utilização correta dos símbolos. Primeiramente diremos quais são as sequências de símbolos da linguagem formal que nos permitem formar <u>palavras que denotam objetos</u> que, nesse contexto, são chamadas de <u>termos</u>. A seguir definiremos como são as regras de composição de termos com conectivos ou quantificadores (que constituem todas as "palavras" da linguagem formal) para formar corretamente as <u>frases</u> ou <u>afirmações</u> escritas nessa linguagem – chamadas de <u>fórmulas</u> nesse contexto.

D)<u>Termos</u> (palavras que indicam ou denotam objetos) – Definição indutiva:

D1) Toda variável é um termo; (de comprimento 1)
D2) Toda constante da linguagem é um termo; (de comprimento 1)
D3) Se $f(-,...,-)$ é um símbolo de função n-ária e $t_1,..., t_n$ são termos da linguagem, então $f(t_1,...,t_n)$ é um termo da linguagem; (de comprimento igual à soma dos comprimentos dos termos envolvidos +1)
D4) Só se constrói um termo da linguagem pela aplicação sucessiva, e em um número finito de vezes, das cláusulas D1), D2) e D3) (em qualquer ordem).

<u>Exemplos</u>:

1) Os seguintes são termos da linguagem das teorias algébricas (verifique a aplicação das cláusulas acima, diga quais e quantas vezes foram aplicadas e determine os comprimentos dos termos). Observe que cada um denota algum objeto, mas que, para dizer qual é esse objeto, necessitamos saber o contexto no qual ele está sendo empregado. Assim o objeto denotado em a), por exemplo, será diferente se estivermos realizando as operações usuais com racionais, com inteiros módulo 3 ou com matrizes (quais são os elementos neutro e unitário nestes três casos?).

a) $(1+1)^{-1} + (-1)$
b) $(0 \times 1) \times (-1+1)$
c) $-[(x^{-1} \times x) + (1 \times y)]$

2)Os seguintes são termos da linguagem da Teoria dos Conjuntos:

a) $\wp(\phi)$
b) $x \cup (y \cap z)$
c) $\wp[(\sim\phi) \cap \phi]$

Vocês talvez tenham observado que alguns termos indicam ou denotam um objeto preciso (uma vez fornecido um contexto) e outros não, indicam um objeto indeterminado (que ficaria determinado se atribuíssemos valores determinados às variáveis, além de um contexto).

Definição: Termos que não têm ocorrência de variáveis são chamados de termos fechados, os demais são chamados de termos abertos.

Exercício 1: Dê dois exemplos (distintos dos anteriores) de termos fechados e dois exemplos de termos abertos em cada uma das linguagens formais citadas nos exemplos da página 2. Forneça pelo menos duas interpretações aos termos fechados, em contextos distintos. Justifique suas respostas utilizando as definições dadas anteriormente.

A seguir é preciso descrever as sequências de símbolos da linguagem formal que constituem as frases, as afirmações da linguagem com significado. Já foi dito que os verbos estão contidos nos símbolos de predicado e no =. Assim, por exemplo, o símbolo < é lido "é menor do que", = se lê "é igual a", $\in$ significa "pertence a" e $\subset$ significa "está contido em". Ou seja, os símbolos de predicado não são verbos propriamente, mas sempre contêm algum verbo que diz (predica) algo sobre um, dois ou mais objetos, mais precisamente, que estabelece uma propriedade para certos elementos (termos) do discurso ou uma relação entre mais de um deles. Assim, o símbolo < sozinho não é uma afirmação completa. Mas $1 < 0$, sim, é uma afirmação acabada, (no caso, falsa entre os n$^{\underline{os}}$ reais). Também $x < 0$ é uma afirmação, apesar de não ser possível dizer se ela é falsa ou verdadeira se não soubermos a que contexto se está referindo e o que x representa. Os predicados de uma linguagem determinam as propriedades ou relações sobre as quais é possível falar (mais exatamente, escrever) com o uso da linguagem. Numa linguagem formal, as frases são chamadas de fórmulas. Na cláusula E2, damos uma definição de fórmula "redundante", em certo sentido, já que ´s

E) **Fórmulas** (afirmações sintaticamente corretas na linguagem formal)

– Definição indutiva:

E1) Se $P(-,...,-)$ é um símbolo de predicado n-ário e $t_1,...,t_n$ são termos da linguagem, então $P(t_1,...,t_n)$ é uma fórmula; $t_1 = t_2$ também é uma fórmula.

E2) Se φ e χ são fórmulas, então as seguintes expressões também são fórmulas, onde x é variável:

– $\varphi \wedge \chi$ (φ e χ, chamada de <u>conjunção</u> de φ e χ);
– $\varphi \vee \chi$ (φ ou χ, chamada de <u>disjunção</u> de φ e χ);
– $\varphi \rightarrow \chi$ (se φ então χ, chamada de <u>implicação</u> de φ em χ);
– $\varphi \leftrightarrow \chi$ (φ se e se só se χ, chamada de <u>equivalência</u> entre φ e χ);
– $\neg\, \varphi$ (não φ, chamada de <u>negação</u> de φ);
– $(\forall x)\varphi$ (para todo x vale φ, chamada de <u>generalização</u> de φ, <u>fórmula universal</u>); e
– $(\exists x)\, \varphi$ (existe x tal que vale φ para esse x, é chamada <u>fórmula existencial</u>).

E3) Só se obtém uma fórmula da linguagem pela aplicação sucessiva e num número finito de vezes, das cláusulas E1) e E2) (em qualquer ordem).

As fórmulas e seus componentes recebem designações específicas, como descritas nas definições a seguir.

<u>Definições</u>:

1) As fórmulas do tipo descrito em E1) são as afirmações mais simples que se pode fazer numa linguagem. São chamadas de <u>fórmulas atômicas</u>. Dizemos que elas possuem <u>comprimento igual a 1</u> (porque incluem apenas um símbolo de predicado).

2) As fórmulas descritas em E2) são ditas <u>compostas</u>. Seus <u>comprimentos são definidos indutivamente</u>, sendo iguais à soma dos comprimentos da(s) fórmula(s) que as compõe (φ ou φ e χ) +1 (intuitivamente, o comprimento de uma fórmula indica a quantidade de símbolos de predicado e de símbolos lógicos presentes na fórmula – será tanto maior quanto mais complexa for a afirmação que a fórmula expressa).

3) Nas fórmulas do tipo $(\exists x)\varphi$ e $(\forall x)\varphi$, diz-se que as ocorrências da variável x em φ são <u>ligadas</u> (e chama-se esta fórmula de <u>escopo</u> dos quantificadores). Já as ocorrências de variáveis que não estejam no escopo de um quantificador são ditas <u>livres</u>. Observe-se que no item E2 da definição anterior não é exigida a ocorrência da variável x nestas fórmulas, mas, na prática matemática, geralmente a variável quantificada ocorre em seus escopos. Em muitas circunstâncias, para salientar uma ocorrência de x, de fato, em uma fórmula genérica explicita-se este fato da seguinte maneira: $(\exists x)\varphi(x)$ e $(\forall x)\varphi(x)$. É claro que em fórmulas particulares, a ocorrência ou não de x fica evidente por si só.

Assim, por exemplo, ao escrevermos $(\exists x)\ (x = 1)$ e $(\forall x)\ (x = 1)$, estamos construindo duas afirmações acabadas, onde à variável x, que nelas ocorre, não é 'permitido' assumir valores arbitrários, não estamos 'deixando' o x variar livremente. Naquelas afirmações a variável x é um mero recurso linguístico para dizermos algo bem determinado a respeito do universo do discurso. Na primeira afirma-se: "o ('número') 1 está no universo". Na segunda, o que se diz é: "o universo só contém o ('número') 1 como elemento". Fixado um universo, essas afirmações têm um único valor de verdade, por exemplo, a 1ª é verdadeira e a 2ª falsa no conjunto dos números reais. Observe-se que pode haver ocorrências livres e ligadas de uma mesma variável em uma fórmula, como por exemplo, em $(\forall x) \neg\ (x = 1) \vee (x = 1)$ (por quê?), sendo necessário prestar bem atenção ao emprego dos parênteses na fórmula para estabelecer o escopo dos quantificadores que nela comparecem.

4) Fórmulas nas quais as variáveis só têm ocorrências ligadas são chamadas de fórmulas fechadas ou sentenças. Fórmulas onde existe alguma ocorrência livre de variável (ocorrência de variável sem estar no escopo de um dos quantificadores – sem ser abrangida por quantificador) são chamadas de fórmulas abertas.

Exemplos:

1) Na linguagem das teorias algébricas vista antes:
   a) $(\forall x)(\exists y)[x + y = 0]$
   b) $(\forall x)(\neg(x = 0) \rightarrow (\exists y)(x \times y = 1))$
   c) $(\forall z)(x < y \rightarrow z \times x < z \times y)$
   d) $(\neg(x = 0)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$

2) Na teoria dos conjuntos:
   a) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$
   b) $(\exists x)(x \in \phi) \leftrightarrow (\forall y)\ (x \in y)$
   c) $((\sim \wp(\phi) \cup \phi) = \phi) \rightarrow (\forall x)(x = \phi)$
   d) $(\forall x)(x \in \phi \leftrightarrow x \in y)$

Exercício 2: Nos itens a seguir, justifique suas soluções utilizando as definições dadas.

a) Quais das fórmulas acima são abertas e quais são fechadas?
b) Invente mais duas fórmulas para cada uma das linguagens citadas, uma aberta e uma fechada.
c) Invente uma sequência de símbolos em cada uma das linguagens citadas que não seja uma fórmula. Justifique.
d) Determine os comprimentos das fórmulas dos exemplos 1 e 2 e das fórmulas inventadas no exercício 2b.

Exercício 3:

A) Imagine que queiramos estabelecer uma "teoria formal de relações familiares" (pensando no universo dos seres humanos), com linguagem formal adequada para referir-se a: casais, filhos, pais, netos, primos, irmãos e tios. Não iremos fazer referência a pessoa específica, assim não necessitaremos de constantes na nossa linguagem. Mas deveremos ter alguns símbolos de predicados e funcionais. Convencionamos a seguir os símbolos para uma linguagem formal adequada a esta situação.

Predicados binários: C(x,y) – leia-se "x é casado(a) com y";
F(x,y) – leia-se "x é filho(a) de y";
I(x,y) – leia-se "x é irmã(o) de y";
N(x,y) – leia-se "x é neto(a) de y";
T(x,y) – leia-se "x é tio(a) de y";
P(x,y) – leia-se "x é primo(a) de y";

Predicado ternário: FC(x,y,z) – leia-se "x é filho(a) de y e de z";
Símbolos funcionais unários: p(x) – leia-se "o pai de x";
m(x) – leia-se "a mãe de x".

Traduza as seguintes fórmulas desta linguagem para um português compreensível a qualquer pessoa.

I) $(\forall x)[(\exists y)(\exists z)(F(x,y) \wedge F(y,z)) \rightarrow N(x,z)]$

II) $(\forall u)(\forall v)(\exists x)\{(\exists y)(\exists z)[I(y,z)\wedge C(x,y)\wedge C(x,z)\wedge FC(u,x,y)\wedge FC(v,x,z)] \rightarrow [I(u,v)\wedge P(u,v)\wedge((x = p(u) \vee x = m(u)) \wedge T(x,u)]\}$

B) Invente duas afirmações (tanto faz se verdadeiras ou falsas) dentro da "teoria formal de relações familiares" e registre-as tanto em português corrente como na "linguagem formal" definida acima. Especifique, justificando, se são abertas ou fechadas.

C) Crie símbolos (de constante, de predicados ou funcionais) para "linguagens formais" adequadas a cada uma das afirmações abaixo e reescreva-as como fórmulas da linguagem fixada. Diga, para cada fórmula escrita, se é aberta ou fechada. Justifique a correção sintática de suas fórmulas, por meio das definições dadas.

1. Um ser humano de menos de 20 kg ou é doente ou é criança.
2. Eu não vou casar e não vou comprar uma bicicleta.
3. Para todo brasileiro existe um chinês que tem a mesma idade, o mesmo sexo e a mesma profissão.
4. f é uma função de com domínio e contradomínio no conjunto dos números reais.
5. Se x é real e maior que dois então $\ln(x^2)/x$ é diferente de $\ln(x)$.
6. Se todo homem bem sucedido usa terno da marca TERNOX e as mulheres adoram os homens que usam ternos da marca TERNOX, como Pedro usa ternos da marca TERNOX, as mulheres adoram Pedro e ele é bem sucedido.

<u>Exercício 4</u>:

A) Identifique, no capítulo I do livro "Fundamentos da Geometria" de David Hilbert (edição revista e coordenada por A. J. de Oliveira, Ed. Gradiva, 2003, Portugal[1]) os predicados necessários para a formulação dos axiomas de incidência e de ordem. Crie símbolos de predicados para uma linguagem formal que seja adequada à Teoria Axiomática de Incidência e de ordem na Geometria Euclidiana tal como Hilbert formulou no seu livro "Grundlagen der Geometrie". Observe que é necessário distinguir se uma variável está sendo considerada como ponto, como reta ou como plano, se um ponto está sobre uma reta e, dados 3 pontos, se um deles está estre os outros dois.

B) Escreva os axiomas de incidência e ordem formulados por Hilbert como fórmulas fechadas da linguagem formal fixada no item anterior. Para escrevê-los em linguagem formal, a linguagem deverá dispor de 3 símbolos de predicados unários, 1 símbolo de predicado binário e i símbolo de predicado ternário, que sugerimos sejam anotados por:

---

[1] Trata-se de uma tradução portuguesa da 7ª e última edição alemã, de janeiro de 1930. É de se observar que os axiomas de continuidade da Geometria Euclidiana formulada por Hilbert não podem ser expressos em uma linguagem formal de primeira ordem.)

$P(x)$ (x é ponto); $R(x)$ (x é reta); $\pi(x)$ (x é plano);
$S(x,y)$ (x está sobre y); e $E(y,x,z)$ (x está entre y e z).

Exercício 5:

Reescreva cada uma das seguintes frases pesquisadas na mídia por alunos de MAT0349 em linguagem formal. Para tanto, símbolos de predicado deverão ser criados e a estrutura lógica de cada frase deve ser identificada (se é uma conjunção, disjunção, negação, implicação, equivalência, universal ou existencial).

a) "Se Clinton estivesse no Titanic, o iceberg teria afundado." (G.W. Bush, Veja, 24/11/2004, pg. 39)

b) "Falo muito porque não sei falar." (Gilberto Gil, Veja, 8/12/2004, pg.39)

c) "Nosso plano de saúde oferece assistência e cobertura integral. Exceto em casos de parto e doenças preexistentes." (referência a www.futuro.usp.br, sem data de acesso)

d) "Obviamente a Bíblia é verdadeira. Ninguém pode provar o contrário." (htpp://www.acedaniel.hpg.ig.com.br/logica.htm sem data de acesso)

e) "Jim Bakker foi um cristão pérfido; logo, todos os cristãos também são." (htpp://www.acedaniel.hpg.ig.com.br/logica.htm sem data de acesso)

f) "É engraçado que, na China antiga, o médico era responsável por uma cidade, um bairro... e, sempre que alguém ficava doente, era colocada uma lanterna na porta da casa, como um sinal. Então, se todas as portas das casas na cidade apresentassem o sinal, significava que o médico não estava trabalhando direito." (http://www1.folha.uol.com.br/folha/equilibrio/notícias ... Acesso em 19/11/2004)

g) "Tenho horror de viajar e acho que se viagem fosse cultura, todo marinheiro seria um sábio." (O Estado de São Paulo, 17/04/1988)

h) "O deputado disse que se a presidência do Conselho de ética mudasse, conseguiria as mudanças que queria no processo. Como a presidência não foi alterada, obviamente e que não conseguiu mudanças (...)." (Folha de São Paulo, 2009)

i) "Algumas pessoas ouviram pelos corredores do senado o deputado federal João Freitas dizer que: *Se meu filho João for aprovado no vestibular, então terá uma carro.* (...) Semanas depois, João foi visto de carro novo nos arredores da casa do deputado, não foi preciso perguntar, passou no vestibular." (Jornal dos concursos, 2008)

j) "Não creio que devamos abandonar o dependente (químico) à própria sorte (....) Se levamos esse argumento às últimas consequências, o Estado também não deveria prestar atendimento ao portador de câncer fumante ou ao cardiopata que abusava do churrasco." (H. Schwartsman, O preço da liberdade, 09/12/2004)