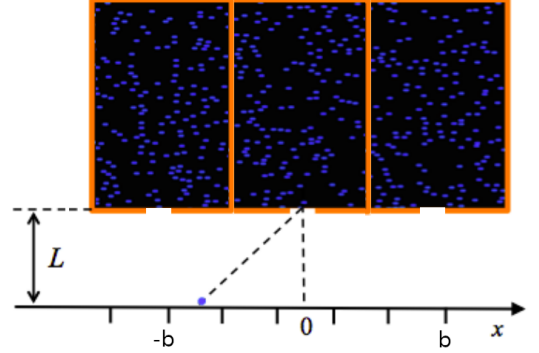


Termo-Estatística

Prof. Thales Souza Freire

14 de setembro de 2023

Q 1. No experimento indicado, as moléculas do gás podem escapar por cada pequeno orifício em partições de dimensões e posição dos furos idênticas. A distribuição das posições ao longo do eixo x indica a distribuição direcional das velocidades das moléculas no plano xy , pois $x/L = v_x/v_y$. Considere os eventos do tipo: “detecção de uma molécula em um intervalo Δx ”. Considere que as partículas se espalham após saírem dos furos de cada partição da caixa sem direção preferencial (equiprobabilidade) e que as partículas não se chocam após saírem dos furos. Assim, a detecção será equivalente a realizar o experimento abrindo cada furo separadamente.



- (a) Escreva a função distribuição de probabilidade ($f(x)$) para a detecção combinada dos três orifícios abertos ao mesmo tempo. Lembre-se que esta função deve estar normalizada.
- (b) Discuta as condições para as regiões de maior probabilidade de detecção de partículas, relacionando b e o desvio padrão (σ).
- (c) Calcule os valores de $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e compare com os definidos no item (a) para a construção da $f(x)$.

Q1. a) Cada orifício gera uma distribuição gaussiana com média no ponto logo abaixo do orifício, ou seja:

$$f(x) = \frac{1}{3} A e^{-\alpha(x+b)^2} + \frac{1}{3} A e^{-\alpha x^2} + \frac{1}{3} A e^{-\alpha(x-b)^2}$$

Cada contribuição é normalizada pelas constantes A e α na situação em que os demais orifícios estão fechados. A caixa com os orifícios é montada de forma que os gaussianos de cada orifício tenham o mesmo desvio padrão e altura, quando apenas 1 furo está aberto.

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$$

b) Vamos encontrar os extremos de $f(x)$:

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{A}{3} \frac{d}{dx} \left(e^{-\alpha(x+b)^2} + e^{-\alpha x^2} + e^{-\alpha(x-b)^2} \right) = 0$$

Vamos reescrever o termo entre parenteses:

$$e^{-\alpha x^2} e^{-2\alpha bx} e^{-\alpha b^2} + e^{-\alpha x^2} + e^{-\alpha x^2} e^{+2\alpha bx} e^{-\alpha b^2}$$

$$e^{-\alpha x^2} \left[\underbrace{e^{-\alpha b^2}}_B \underbrace{(e^{-2\alpha bx} + e^{+2\alpha bx})}_{2 \cosh(2\alpha bx)} + 1 \right]$$

$$e^{-\alpha x^2} \left[2B \cosh(2\alpha bx) + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[e^{-\alpha x^2} \left[2B \cosh(2\alpha bx) + 1 \right] \right] = 0$$

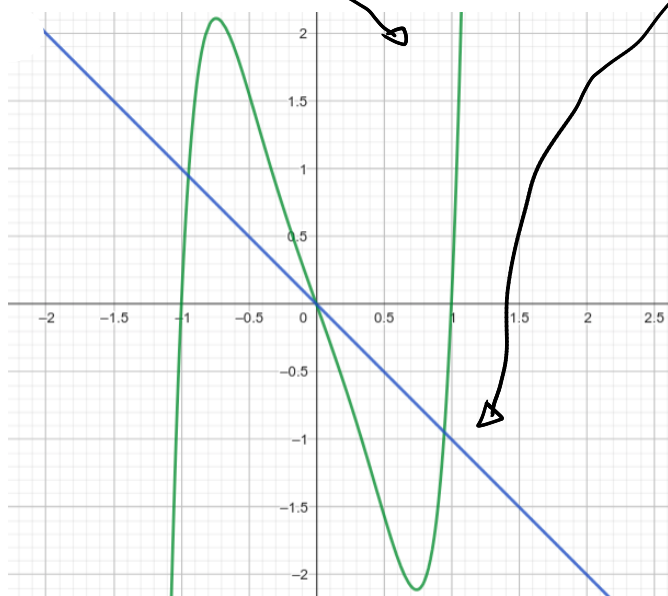
$$-2\alpha x e^{-\alpha x^2} [2B \cosh(2\alpha bx) + 1] + e^{-\alpha x^2} \cdot 2B \cdot 2\alpha b \sinh(2\alpha bx) = 0$$

$$e^{-\alpha x^2} \{ 2B[x \cosh(2\alpha bx) + b \sinh(2\alpha bx)] + x \} = 0$$

$$(i) e^{-\alpha x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (ii) 2B[x \cosh(2\alpha bx) + b \sinh(2\alpha bx)] + x = 0$$

$$(i) \text{ para } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow e^{-\alpha x^2} \rightarrow 0$$

$$(ii) \frac{x \cosh(2\alpha bx) + b \sinh(2\alpha bx)}{2B} = -\frac{x}{2B}$$



→ Solução gráfica do problema
As constantes da equação podem mudar de 1 para 3 pontos de intersecção, ou seja, é possível obter apenas 1 máximo, centrado em $x=0$ ou 3 máximos, com um em $x=0$ e outros 2 próximos dos orifícios em $x=-b$ e $x=+b$

$$c) \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x e^{-\alpha(x+b)^2} dx}_{-b} + \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x e^{-\alpha x^2} dx}_0 + \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x e^{-\alpha(x-b)^2} dx}_b$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{3} (-b + b) = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x^2 e^{-\alpha(x+b)^2} dx}_{\langle x^2 \rangle_{-b}} + \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x^2 e^{-\alpha x^2} dx}_{\langle x^2 \rangle_0} + \frac{1}{3} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A x^2 e^{-\alpha(x-b)^2} dx}_{\langle x^2 \rangle_b}$$

Para cada furo, temos:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \begin{cases} \langle x^2 \rangle_{-b} + b^2 & \rightarrow \text{furo do lado esquerdo} \\ \langle x^2 \rangle_0 & \rightarrow \text{" " meio} \\ \langle x^2 \rangle_{+b} - b^2 & \rightarrow \text{" " " direito} \end{cases}$$

Assim, com os 3 furos abertos:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} (\cancel{\sigma^2 - b^2}) + \frac{1}{3} \sigma^2 + \frac{1}{3} (\cancel{\sigma^2 + b^2}) = \frac{1}{3} \cdot 3\sigma^2 = \sigma^2$$

Como o $f(x)$ dos 3 furos em conjunto é simétrica em relação a $x=0$, o $\langle x \rangle$ é zero. Além disso, $\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 = \sigma^2$. Isso mostra que a contribuição dos furos em $\pm b$ se cancelam para $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.