PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 4 DE SETEMBRO

LISTA 3

13)

a) $V = P_2(\mathbb{R})$, e $W = \{p \in V : p$ possui pelo menos uma raiz real$\}$.

RESOLUÇÃO: W não é um subespaço de V, pois $x+1$ e $-x$ pertencem a W, e $(x+1)+(-x) \notin W$ (já que $(x+1)+(-x) = 1$ e, portanto, não possui raízes reais).

b) $V = P_2(\mathbb{R})$, e $W = \{p \in V : (\forall \alpha \in \mathbb{R})(p(\alpha) \geq 0)\}$.

RESOLUÇÃO: W não é um subespaço de V, pois $x^2+1 \in W$ (já que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^2+1 \geq 1 > 0$), e $(-1)(x^2+1) \notin W$ (já que $(-1)(0^2+1) = -1 < 0$).

c) $V = P_3(\mathbb{R})$, e $W := \{p \in V : p(1) = 0\}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de V, pois:

polinômio nulo

- $\mathbf{0} \in W$ (já que $\mathbf{0}(1) = 0$);

• se $p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $q(x) := b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ pertencem a W, então, como

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3,$$

$$(p+q)(1) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + (a_3+b_3)$$
$$= \underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=p(1)=0\ (\text{pois } p\in W)} + \underbrace{(b_0+b_1+b_2+b_3)}_{=q(1)=0\ (\text{pois } q\in W)}$$
$$= 0+0 = 0,$$

e, portanto, nesse caso, $p+q \in W$;

• se $p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ pertence a W, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então, como

$$(\lambda p)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3,$$

$$(\lambda p)(1) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3$$
$$= \lambda \underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=p(1)=0\ (\text{pois } p\in W)},$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda p \in W$.

d) $V = P_3(\mathbb{R})$, e $W = \{ p \in V : p(t) = at^3 + bt$, em que $a, b \in \mathbb{R} \}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de V, pois:

- $\mathbf{0} \in W$ (já que $\mathbf{0}(t) = 0t^3 + 0t$);

- se $p(t) := at^3 + bt$, e se $q(t) := ct^3 + dt$, então

$$(p+q)(t) = (a+c)t^3 + (b+d)t,$$

e, portanto, nesse caso, $p+q \in W$;

- se $p(t) := at^3 + bt$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(\lambda p)(t) = \lambda a t^3 + \lambda b t$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda p \in W$.

14)

a) $W = \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = f(1) \}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de $\mathcal{C}([0,1])$, pois:

função nula de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$

- $\mathbf{0} \in W$ (já que $\mathbf{0}(0) = 0 = \mathbf{0}(1)$);
- se $f, g \in W$, então

$$(f+g)(0) = \underbrace{f(0)}_{\substack{=f(1) \\ (\text{pois } f\in W)}} + \underbrace{g(0)}_{\substack{=g(1) \\ (\text{pois } g\in W)}} = f(1)+g(1) = (f+g)(1),$$

e, portanto, nesse caso, $f+g\in W$;

- se $f\in W$, e se $\lambda\in\mathbb{R}$, então

$$(\lambda f)(0) = \lambda\cdot \underbrace{f(0)}_{=f(1)\,(\text{pois } f\in W)} = \lambda\cdot f(1) = (\lambda f)(1),$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda f\in W$.

b) $W = \left\{ f\in \mathcal{C}([0,1]) : f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \right\}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de $\mathcal{C}([0,1])$, pois:

- $\mathbf{0}\in W$ (já que $\mathbf{0}\left(\frac{1}{2}\right)=0$);

- se $f,g\in W$, então

$$\left(f+g\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0\,(\text{pois } f\in W)} + \overbrace{g\left(\frac{1}{2}\right)}^{=0\,(\text{pois } g\in W)} = 0+0=0,$$

e, portanto, nesse caso, $f+g\in W$;

• se $f \in W$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(\lambda f)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lambda \cdot \underbrace{f\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{=0 \text{ (pois } f \in W)} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda f \in W$.

d) $W = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \int_0^1 f(t)\,dt = f(0) \right\}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de $\mathcal{C}([0,1])$, pois:

• $\mathbf{0} \in W$ (já que $\int_0^1 \mathbf{0}(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0 = \mathbf{0}(0)$);

• se $f, g \in W$, então

$$\int_0^1 (f+g)(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{= f(0) \text{ (pois } f \in W)} + \underbrace{\int_0^1 g(t)\,dt}_{= g(0) \text{ (pois } g \in W)}$$

$$= f(0) + g(0) = (f+g)(0),$$

e, portanto, nesse caso, $f+g \in W$;

• se $f \in W$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\int_0^1 (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{= f(0)\ (\text{pois } f \in W)} = \lambda f(0) = (\lambda f)(0),$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda f \in W$.

11)

b) $V = M_2(\mathbb{R})$, e $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.

RESOLUÇÃO: W é um subespaço de V, pois:

- $O_n \in W$ (já que $O_n^t = O_n = -O_n$);

- se $A, B \in W$, então
$$(A+B)^t = \underbrace{A^t}_{=-A} + \underbrace{B^t}_{=-B} = (-A) + (-B) = -(A+B),$$

e, portanto, nesse caso, $A+B \in W$;

- se $A \in W$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então
$$(\lambda A)^t = \lambda \underbrace{A^t}_{=-A} = \lambda(-A) = -(\lambda A),$$

e, portanto, nesse caso, $\lambda A \in W$.