Gabarito Lista 2 - MAE0212

Coleção 1 - Exercício 18)

De acordo com o enunciado, podemos modelar o problema como uma variável $X \sim Bin(0.8; 25)$. Sabendo disso, podemos utilizar a convergência da binomial para uma normal e o TLC para conseguir ver a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior a 75% ou superior a 85%. Logo, utilizando a definição de esperança ($E(X) = np$) e variância da binomial (Var(X)=np(1-p)), teremos:

$$X \approx Y \sim N(0.8 * 25; 0.8 * 25 * 0.2) = N(20; 5)$$

Portanto para vermos a probabilidade da proporção na amostra ser inferior a 75%:

$$P(X < 0.75) \approx P(Y < 18.75) =_{TLC} P(Z < \frac{18.75 - 20}{\sqrt{5}}) = P(Z < -0.559017) \approx 0.288$$

Agora para vermos a probabilidade da proporção na amostra ser superior a 85%:

$$P(X > 0.85) \approx P(Y > 21.25) =_{TLC} P(Z < \frac{21.25 - 20}{\sqrt{5}}) = P(Z > 0.559017) \approx 0.288$$

Vemos que as probabilidades são iguais devido a simetria das variáveis binomial e normal.

Intervalo de confiança I - Exercício 1-a)

Assumindo a variável do nosso problema dada por $X \sim N(\mu; 4)$, utilizaremos o estimador $\bar{X}$ tal que $\bar{X} \sim (\mu; \frac{4}{n})$ e a definição do erro cometido dado por $\epsilon = \bar{X} - \mu$ tal que $\epsilon \sim N(0; \frac{4}{n})$ para checarmos o tamanho amostral tal que o erro cometido ao estimarmos μ não seja superior à 30 segundos com probabilidade 0,95:

$$P(|\epsilon| \leq \frac{1}{2}) =_{TLC} P(-\frac{0.5}{\sqrt{\frac{4}{n}}} \leq Z \leq \frac{0.5}{\sqrt{\frac{4}{n}}}) = 0.95$$

Logo, utilizando a tabela da normal padrão, teremos que:

$$1.96 = \frac{0.5}{\sqrt{\frac{4}{n}}} \quad => \quad \frac{4}{n} = (\frac{0.5}{1.96})^2 \quad => \quad n = \frac{4}{(\frac{0.5}{1.96})^2} = 61.46$$

Logo o tamanho da amostra deverá ser igual à 62 para que o erro cometido ao estimarmos o tempo médio μ não seja superior a 30 segundos com probabilidade 0,95.

Intervalo de confiança I - Exercício 1-b)

A estimativa pontual do tempo de reação médio μ será dada utilizando o estimador $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20}$. Logo teremos:

```
> A estimativa pontual do tempo de reação médio será 4.745
```

Intervalo de confiança I - Exercício 1-c)

Utilizando a variável $\bar{X}$,seu estimador $\bar{x}$, a variável aleatória ϵ e a margem de erro e teremos:

$$P(|\bar{X}-\mu|<e)=0.96 \;\; => \;\; P(-e\frac{\sqrt{n}}{2}<Z<e\frac{\sqrt{n}}{2})=0.96$$

Utilizando o valor tabelado da normal padrão e o tamanho amostral:

$$2.06=e\frac{\sqrt{20}}{2} \;\; <=> \;\; e=0.921$$

Logo temos que a margem de erro da estimativa pontual será de 0.921 e voltando com os valores, teremos sua estimativa pontual:

$$P(-e<\bar{X}-\mu<e)=0.96 \;\; => P(\bar{X}+e>\mu>\bar{X}-e)=0.96$$

Utilizando agora o valor do estimador de $\bar{X}$ e de e, teremos:

$$P(\bar{X}+e>\mu>\bar{X}-e)=0.96 \;\; => \;\; P(5.666>\mu>3.824)=0.96$$

Portanto sabemos que a média μ terá estimativa intervalar $[3.824; 5.666]$ com 96% de confiança.

Intervalo de Confiança II - Exercício 1-a)

Como visto em aula, utilizaremos a definição de intervalo de confiança de proporção utilizando a solução conservadora. Nesse caso teremos:

$$IC(p,\gamma=0.96)=[\hat{p}\,\pm\,z_{0.98}\sqrt{\frac{1}{4n}}]$$

E portanto nosso erro será dado por:

$$\epsilon=z_{0.98}\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Substituindo agora pelos valores do enunciado e tabelado, teremos que:

$$\epsilon=0.03 \;\; <=> \;\; 0.03=2.06\sqrt{\frac{1}{4n}} \;\; <=> \;\; n=(\frac{2.06}{0.03})^2\frac{1}{4}\approx 1178.78$$

Portanto 1179 eleitores devem ser consultados de modo que a proporção p seja estimada com um erro de $\approx$ 0,03 com probabilidade 0,96.

Intervalo de Confiança II - Exercício 1-b)

Utilizando a solução conservadora, não é possível reduzir o tamanho amostral pois o erro é indiferente da proporção. Porém se tomarmos uma solução otimista, podemos assumir que o candidato pode ter a porcentagem de votos em um dos extremos (também possível para qualquer ponto do intervalo, porém os extremos nos trará a menor variância) indicados do dia anterior. Nesse caso, utilizando o valor dos extremos, o erro será dado por:

$$\epsilon=z_{0.98}\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{n}}$$

E portanto:

$$\epsilon = 0.03 \quad <=> \quad 0.03 = 2.06\sqrt{\frac{0.2475}{n}} \quad <=> \quad n = (\frac{2.06}{0.03})^2 \cdot 0.2475 \approx 1166.99$$

Neste caso, 1167 eleitores devem ser consultados de modo que a proporção p seja estimada com um erro de $\approx$ 0,03 com probabilidade 0,96. Vemos então uma redução de 12 eleitores comparada à solução conservadora.

Intervalo de Confiança II - Exercício 1-c)

Utilizando a definição de intervalo de confiança de proporção com solução conservadora, teremos:

$$IC(p, \gamma = 0.96) = [\hat{p} \pm z_{0.98}\sqrt{\frac{1}{4n}}] = [\frac{564}{1200} \pm 2.06\sqrt{\frac{1}{4800}}] \approx [0.47 - 0.03\,;\, 0.47 + 0.03] = [0.44; 0.50]$$