PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Lista de Exercícios – Problemas 2D em coordenadas retangulares

1) Mostre que para materiais isótropos com comportamento elástico-linear a seguinte relação entre as componentes de tensão e deformação é válida em problemas de estado plano de tensão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} . \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

2) Mostre que para materiais isótropos com comportamento elástico-linear a seguinte relação entre as componentes de tensão e deformação é válida em problemas de estado plano de deformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu).(1-2\nu)} . \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

3) Mostre que, se $V(x, y)$ for uma função harmônica plana, ou seja, se satisfizer a equação de Laplace dada por:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

então as funções xV, yV e $(x^2 + y^2)V$ satisfazem a equação de compatibilidade de deformações expressa na forma:

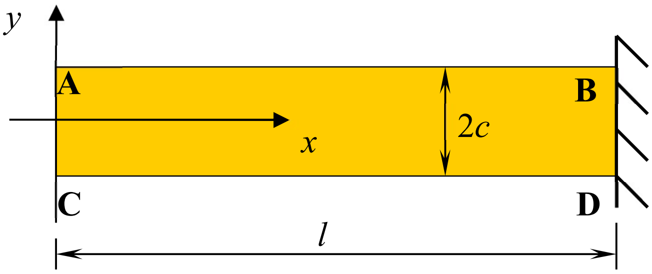
$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

e podem, portanto, ser tomadas como funções de tensão.

4) Considere a função dada por:

$$\phi(x,y) = \frac{3F}{4ct}\left(xy - \frac{xy^3}{3c^2}\right) + \frac{Py^2}{4ct}$$

e a região do plano associada à chapa retangular de altura $2c$, comprimento l e espessura t indicada abaixo:



Pede-se:

a) mostrar que a função $\phi(x,y)$ pode ser utilizada como uma função de tensão;

b) determinar a distribuição de tensões $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ associada a esta função;

c) determinar o carregamento aplicado aos contornos AB, AC e CD da chapa;

d) determinar o campo de deformações $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ admitindo que o material da chapa tenha comportamento elástico-linear com constantes elásticas E e ν dadas;

e) determinar o campo de deslocamentos $u(x,y)$ e $v(x,y)$ considerando as seguintes condições necessárias para impedir o movimento de corpo rígido:

$$u(l,0) = 0, \qquad v(l,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(l,0)} = 0$$

5) Mostre que a função $\phi(x,y)$ dada abaixo é uma função de tensão e determine qual problema de EPT ela permite resolver quando aplicada à região delimitada pelas retas $y = \pm c$ e $x = 0$, no semi-eixo positivo dos x (vide figura do exercício 4).

$$\phi(x,y) = \frac{q}{8c^3}\left[x^2(y^3 - 3c^2y + 2c^3) - \frac{y^3}{5}(y^2 - 2c^2)\right]$$

6) Considere a função de tensão indicada no exercício 4, tomando $P = 0$. Mostre então que, se aplicarmos as condições de apoio dadas por:

$$u(l,0) = 0, \qquad v(l,0) = 0, \;\; u(l,c) = u(l,-c) = 0$$

a flecha, neste caso, será dada por:

$$v|_{(0,0)} = \frac{Fl^3}{3EI}\left[1 + \frac{(4+5\nu)}{2}\left(\frac{c}{l}\right)^2\right].$$