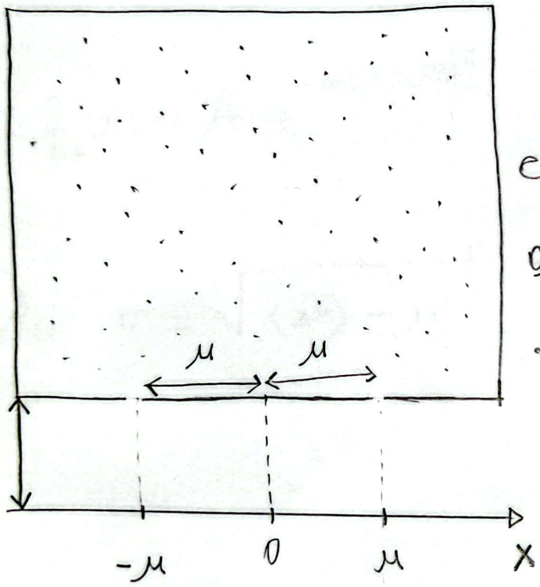
Experimento da fenda dupla clássico

Seguindo a ideia da detecção de partículas que escapam de uma caixa, podemos fazer dois orifícios na caixa:

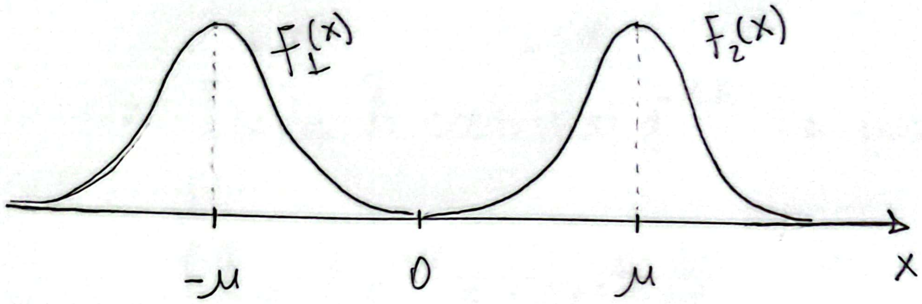


. Os orifícios estarão alinhados com centro do anteparo, de forma que a distância da projeção ortogonal de cada furo no eixo x à origem seja a mesma, igual a μ.

- De cada furo escapará partículas aleatoriamente, sem direção preferencial, de modo que possamos assumir a equiprobabilidade

- Vamos fazer a idealização de que as partículas não se chocam após escapar da caixa por cada furo, de modo que a distribuição de partículas detectadas seja a soma de duas distribuições independentes, de mesma altura e variância.

Com essas hipóteses, podemos escrever:



$$F_1(x) = A\, e^{-\alpha(x+\mu)^2} \quad ; \quad F_2(x) = A\, e^{-\alpha(x-\mu)^2} \quad ; \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2\sigma^2} \\ A = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

onde $\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \mu^2}$ → onde $\langle x^2\rangle$ é a media quadrática para cada orifício aberto individualmente

A distribuição de probabilidade de encontrar uma partícula em um intervalo dx é:

normalização

$$dp = F(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\big(F_1(x) + F_2(x)\big)\,dx$$

Assim, a nova função distribuição de probabilidade fica:

$$F(x) = \frac{A}{2}\left(e^{-\alpha(x+\mu)^2} + e^{-\alpha(x-\mu)^2}\right)$$

$$= A\, e^{-\alpha(x^2+\mu^2)}\left(\frac{e^{-2\alpha\mu x} + e^{2\alpha\mu x}}{2}\right)$$

A8

$$\Rightarrow f(x) = Ae^{-\alpha\mu^2} e^{-\alpha x^2} \cosh(2\alpha\mu x)$$

$$\therefore \underset{\to\text{ par}}{f(x)} = \tilde{A} \underset{\to\text{ par}}{\cosh(\beta x)}\, e^{-\alpha x^2} \to \text{par}$$

com $\begin{cases} \tilde{A} = Ae^{-\alpha\mu^2} = \text{constante} \\ \beta = 2\alpha\mu \end{cases}$

Assim, temos uma distribuição simétrica em relação à origem, visto que $\cosh(\beta x)$ e $e^{-\alpha x^2}$ são funções pares, ou seja a $f(x)$ resultante é uma função par. Com isso, o valor médio deve coincidir com o mais provável. Antes de calcular os valores médios, vamos relembrar algumas propriedades das funções hiperbólicas:

1) definição:

$$\operatorname{senh}(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \quad ; \quad \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

2) derivada:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(ax) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right) = a\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right) = a\cosh(ax)$$

n8

$$\frac{d}{dx}\cosh(ax) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right) = a\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right) = a\,\mathrm{senh}(ax)$$

* as derivadas de senh e cosh não trocam de sinal com as derivadas de sen e cos!

- Valor de x mais provável

Usando a condição de máximo:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\tilde{A}\cosh(\beta x)\,e^{-\alpha x^2}\right) = 0$$

$$\tilde{A}\left(\beta\,\mathrm{senh}(\beta x)\,e^{-\alpha x^2} - 2\alpha x\cosh(\beta x)\,e^{-\alpha x^2}\right) = 0$$

$$\tilde{A}\,e^{-\alpha x^2}\left(\beta\,\mathrm{senh}(\beta x) - 2\alpha x\cosh(\beta x)\right) = 0$$

Neste caso, devemos ter:

(i) $e^{-\alpha x^2} = 0$ ou (ii) $\beta\,\mathrm{senh}(\beta x) - 2\alpha x\cosh(\beta x) = 0$

de (i) $e^{-\alpha x^2} = 0$ se $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$

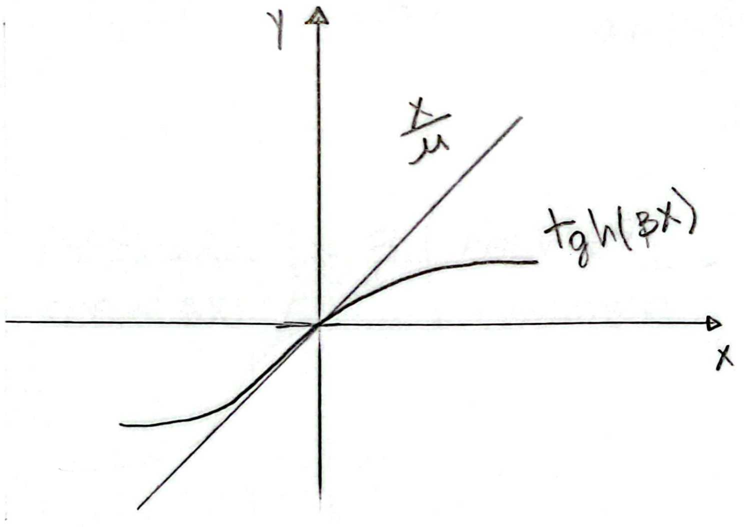
de (ii) $\dfrac{\beta\,\mathrm{senh}(\beta x)}{2\alpha x\cosh(\beta x)} = 1 \Rightarrow \dfrac{\beta}{2\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{tgh}(\beta x)}{x} = 1$

Ou ainda

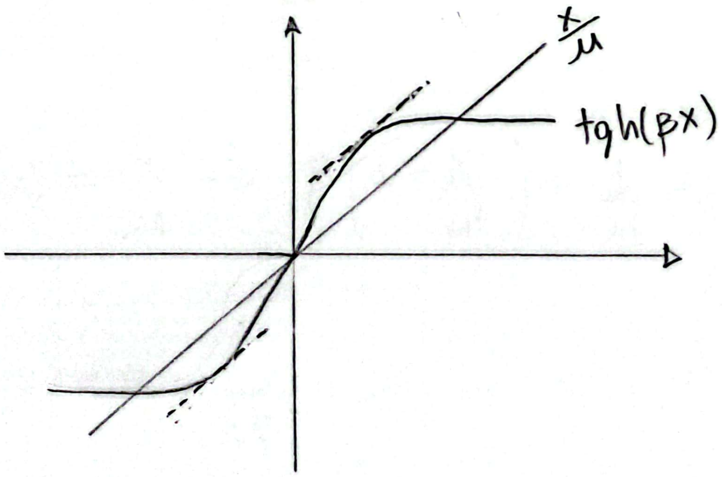
$$\operatorname{tgh}(\beta x) = \frac{2\alpha}{\beta} x = \frac{x}{\mu}$$

Esta equação é chamada de equação transcendental e não tem uma solução analítica simples. Uma maneira de resolver é construindo o gráfico de $\operatorname{tgh}(\beta x)$ e $\frac{1}{\mu}x$ e observar onde elas se cruzam. Para facilitar a análise, considere α fixo e vamos o que ocorre para diferentes valores de μ:

(i)



(ii)



Apesar de não existir solução analítica é possível comparar as situações mostrada em (i) e (iii). Em (i) os gráficos interseptam apenas uma vez, enquanto em (iii) ocorrem três pontos de cruzamento. Se olharmos para as derivadas de $\frac{x}{\mu}$ e $tgh(\beta x)$ veremos que em (i) elas assumem o mesmo valor apenas 1 vez, enquanto que em (iii) isto ocorre 2 vezes. Vamos verificar:

$$\frac{d}{dx}\left(tgh(\beta x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\mu}\right) \Rightarrow \frac{d(\beta x)}{dx}\frac{d}{d(\beta x)}tgh(\beta x) = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \beta \frac{d}{d(\beta x)}\left(\frac{senh(\beta x)}{cosh(\beta x)}\right) = \beta\left(\frac{cosh(\beta x)}{cosh(\beta x)} - \frac{senh^2(\beta x)}{cosh^2(\beta x)}\right) = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \beta\left(1 - tgh^2(\beta x)\right) = 1$$

mas $tgh(\beta x) = \frac{x}{\mu} \Rightarrow \beta\left(1 - \frac{x^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\mu} \Rightarrow x^2 = \mu^2 - \frac{\mu}{\beta}$

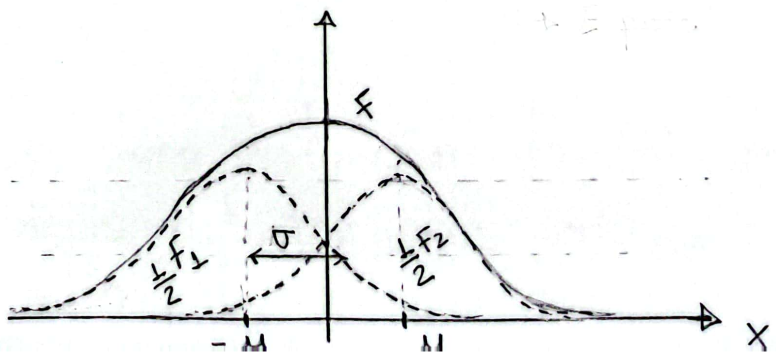
usando $\beta = 2\alpha\mu = \frac{2\mu}{2\sigma^2} = \frac{\mu}{\sigma^2} \Rightarrow x^2 = \mu^2 - \sigma^2$

$\therefore \quad x = \pm \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}$

- Para $\mu = \sigma$, $x = 0$, logo a derivada só irá coincidir em $x = 0$, com 1 intersecção.
- Para $\mu > \sigma$ teremos dois pontos onde as derivadas coincidem, ou seja, 3 pontos de intersecção entre os gráficos.
- Para $\mu < \sigma$ não existirá x real, logo as derivadas não coincidem e teremos apenas 1 intersecção.

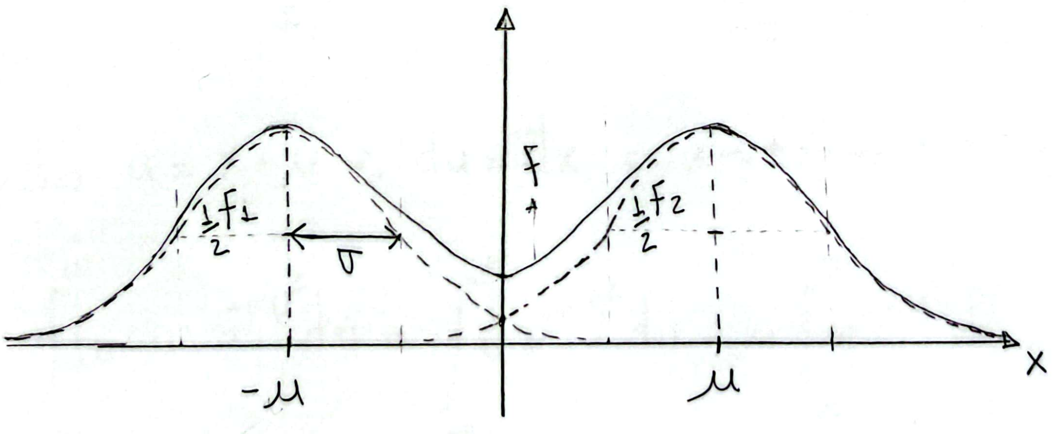
Como a dispersão das partículas depende do tamanho do orifício e da expessura da parede da caixa, no caso em que mantivermos estes parâmetros fixos, σ séra constante. Assim, a distribuição $f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)$ será afetada pela distância entre os furos, ou seja:

1) Se $\mu \leq \sigma$ a distribuição terá apenas 1 extremo, que ocorrerá em $x = 0$



Graficamente podemos interpretar este resultado notando que cada ponto da distribuição $f(x)$ é uma soma dos pontos das $\frac{1}{2}f_1(x)$ e $\frac{1}{2}f_2(x)$ para cada x. Com $\mu < \sigma$ as distribuições $\frac{1}{2}f_1(x)$ e $\frac{1}{2}f_2(x)$ se cruzam acima da meia altura, e o valor de $f(0) = \frac{1}{2}f_1(0) + \frac{1}{2}f_2(0)$ será maior do que $f_1(-\mu)$ e $f_2(\mu)$, (que por construção, $f_1(-\mu) = f_2(\mu)$).

2) Se $\mu > \sigma$ existirá 3 pontos de extremo. Como $f(x)$ claramente tende a zero para $x \to \pm\infty$ (já que f_1 e f_2 possuem esse comportamento), estes 3 extremos serão 2 máximos com um mínimo entre eles:



O caso (2) tem a clara distinção do (1), pois agora a região mais provável de se detectar uma partícula será próximo de $\pm\mu$ e não de $x=0$.

A8

- Cálculo dos valores médios e desvio padrão de $f(x)$

Para realizar este cálculo se torna mais interessante a $f(x)$ na forma:

$$f(x) = \frac{A}{2}\left(e^{-\alpha(x+\mu)^2} + e^{-\alpha(x-\mu)^2}\right)$$

Assim:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\cdot e^{-\alpha(x+\mu)^2} + x\, e^{-\alpha(x-\mu)^2}\right) dx$$

$$= \underbrace{\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\alpha(x+\mu)^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\alpha(x-\mu)^2} dx}_{I_2}$$

Fazendo $u = x+\mu \Rightarrow du = dx$ e $x \to \pm\infty \Rightarrow u \to \pm\infty$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (u-\mu)\, e^{-\alpha u^2} du = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-\alpha u^2} du}_{=0 \text{ (ímpar)}} - \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\therefore I_1 = -\mu\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

fazendo : $\tau = x-\mu$, o resultado será similar ao de I_1, com o sinal trocado:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}(\tau+\mu)\,e^{-\alpha\tau^2}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\tau e^{-\alpha\tau^2}\,d\tau + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\,d\tau$$

$$\therefore \quad I_2 = \mu\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Note que:

$$\frac{A}{2} I_1 = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\mu\sqrt{2\sigma^2\pi} = -\frac{\mu}{2} \quad e \quad A I_2 = \frac{\mu}{2}$$

onde foi usado $A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ e $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$

É o que esperávamos, pois

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx}_{-\mu} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x)\,dx}_{+\mu}$$

Assim, concluimos que

$\langle x\rangle = 0$ (para qualquer relação entre μ e σ!)

• $$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x)\,dx$$

para ambos os casos, escrevemos no início que

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle_i - \mu^2 \Rightarrow \langle x^2 \rangle_i = \sigma^2 + \mu^2 \quad , \quad i = \{1, 2\}$$

para cada gaussiana individualmente, ou seja,

$$\langle x^2 \rangle_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\langle x^2 \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x)\,dx = \sigma^2 + \mu^2$$

ou seja,

$$\boxed{\langle x^2 \rangle_1 = \langle x^2 \rangle_2 = \sigma^2 + \mu^2}$$

Portanto:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle x^2 \rangle_1 + \frac{1}{2}\langle x^2 \rangle_2 = \sigma^2 + \mu^2$$

A resolução das integrais seguiria da seguinte forma:

1) Faça substituições do tipo

$$u = x \pm \mu \Rightarrow du = dx \quad e \quad u \to \pm\infty \text{ quando } x \to \pm\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x\pm\mu)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}(u\pm\mu)^2 e^{-\alpha u^2}du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\alpha u^2}du \pm 2\mu\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\alpha u^2}du + \mu^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}du$$

$$= 2G_2 \pm 2\mu . 0 + \mu^2(2G_0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} + \mu^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\boxed{G_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \Rightarrow \begin{cases} G_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ G_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \end{cases}}$$

Assim:

$$\langle x^2\rangle = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x+\mu)^2}dx + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x-\mu)^2}dx$$

$$= \frac{A}{2}.2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} + \mu^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi.(2\sigma^2)^3} + \mu^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\sigma^2\pi}$$

$$= \frac{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} + \mu^2$$

$$\therefore \boxed{\langle x^2\rangle = \sigma^2 + \mu^2}$$

* Apenas o $\langle x\rangle$ médio muda, e $\langle x^2\rangle$ e σ se mantém, como uma característica da dispersão dos dados.