EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Lugar das Raízes

Aula 10

SEM 0169 – Sistemas de Controle

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
(16) 9 9291 8310

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Objetivo

Entender o papel dos polos na respostas e na estabilidade do sistemas.

Introdução

Considere o sistema representado pela FT:

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)}$$

Qual é a resposta temporal para um entrada unitária (u(t)=1): $\mathrm{U}(s) = 1/s$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s - 1}{s(s+1)(s+2)}$$

Introdução

Considere o sistema representado pela FT:

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)}$$

Qual é a resposta temporal para um entrada unitária (u(t)=1): $\mathrm{U}(s) = 1/s$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s - 1}{s(s+1)(s+2)}$$

Expansão em frações: $$Y(s) = \frac{-0.5}{s} + \frac{4}{(s+1)} + \frac{-3.5}{(s+2)}$$

Transformada de Laplace Inverso: $$y(t) = -0.5 + 4e^{-t} - 3.5e^{-2t}$$

Introdução

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)} \quad \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

dependem do sistema

$$y(t) = -0.5 + 4e^{-1t} - 3.5e^{-2t}$$

dependem da entrada, de onde mede e de onde excita

Local dos polos

Se a parte real desses polos for negativa, o que acontece com as exponenciais?

$$\begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

dependem do sistema

$$y(t) = -0.5 + 4e^{-1t} - 3.5e^{-2t}$$

Teorema: Um sistema SISO com uma função transferência $G(s)$ e estável se, e somente se, os polos de $G(s)$ possuírem a parte real negativa!

Respostas para um entrada limitada

Teorema: Um sistema SISO com uma função transferência $G(s)$ e estável se, e somente se, os polos de $G(s)$ possuírem a parte real negativa!

Um sistema estável apresenta uma resposta limitada para uma entrada limitada!!

Nos próximos slides, vamos mostrar a parte da resposta temporal relacionada ao sistema ($G(s)$) a uma entrada limitada.

$$y(t) = -0.5 + \overbrace{4e^{-1t} - 3.5e^{-2t}}$$

1. Polo único real < 0

$$G_1(s) = \frac{k}{(s+\sigma)}$$

Equação característica

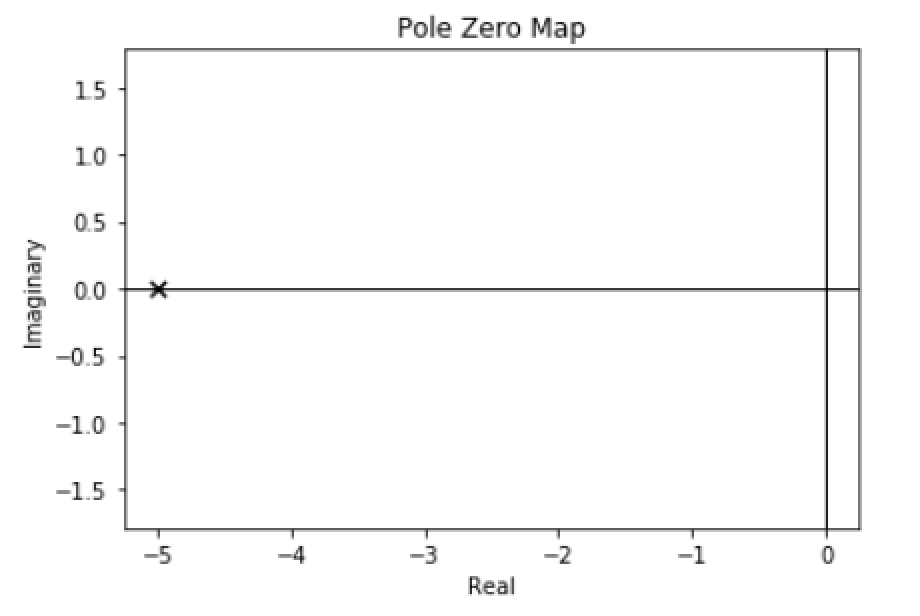
$$s + \sigma = 0$$

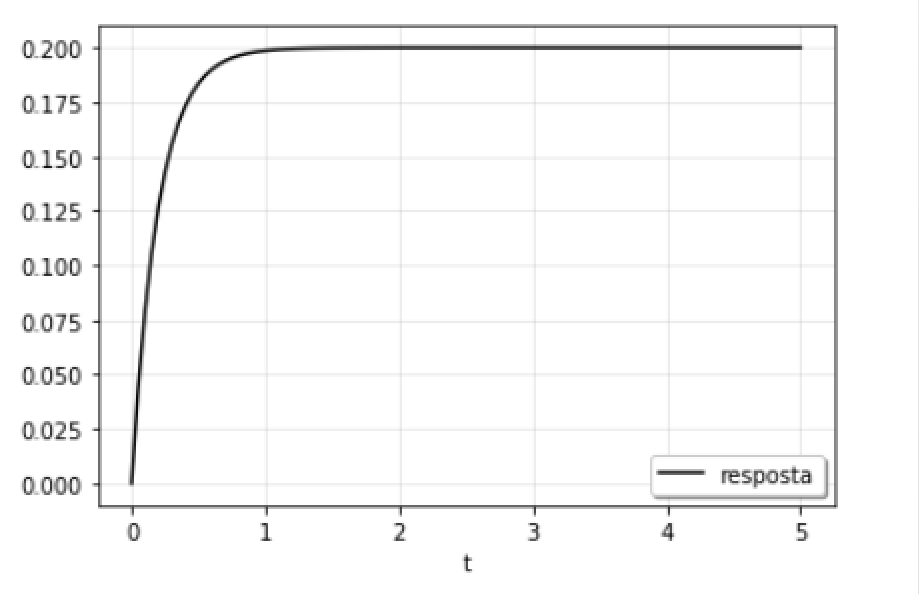
Polos

$$p = -\sigma$$

Resposta

$$k_r e^{-\sigma\, t}$$





*Ver Controle_aula10_ex1.ipynb

2. Polo único real > 0

$$G_2(s) = \frac{k}{(s-\sigma)}$$

Equação característica

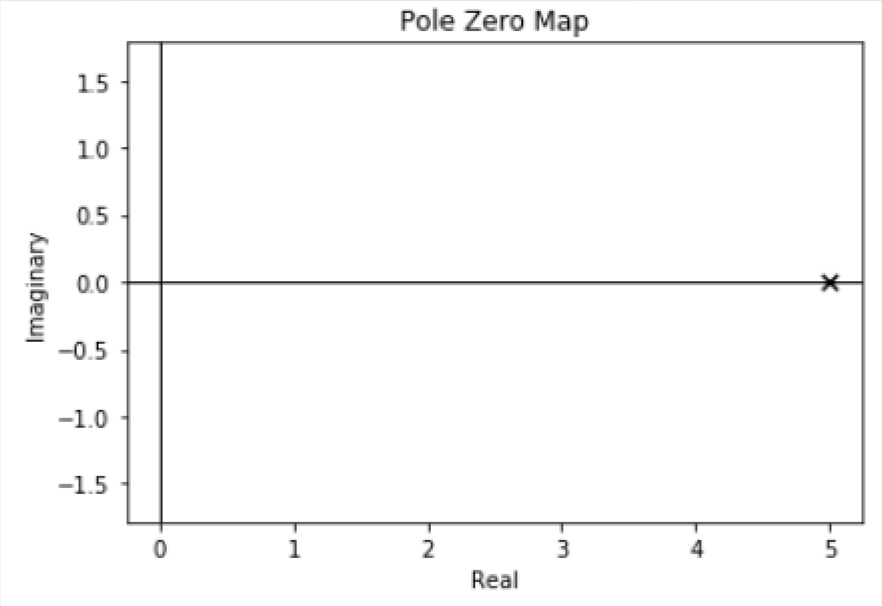
$$s - \sigma = 0$$

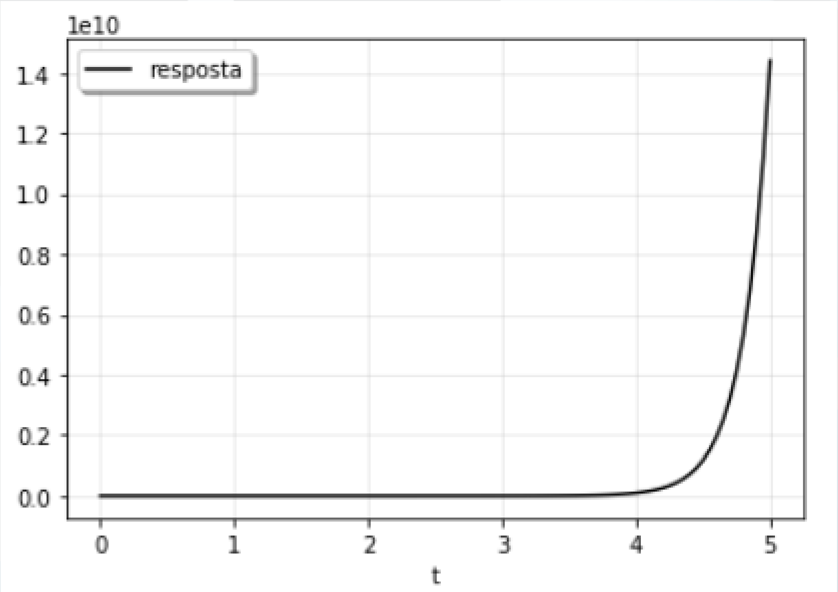
Polos

$$p = \sigma$$

Resposta

$$k_r e^{\sigma\, t}$$

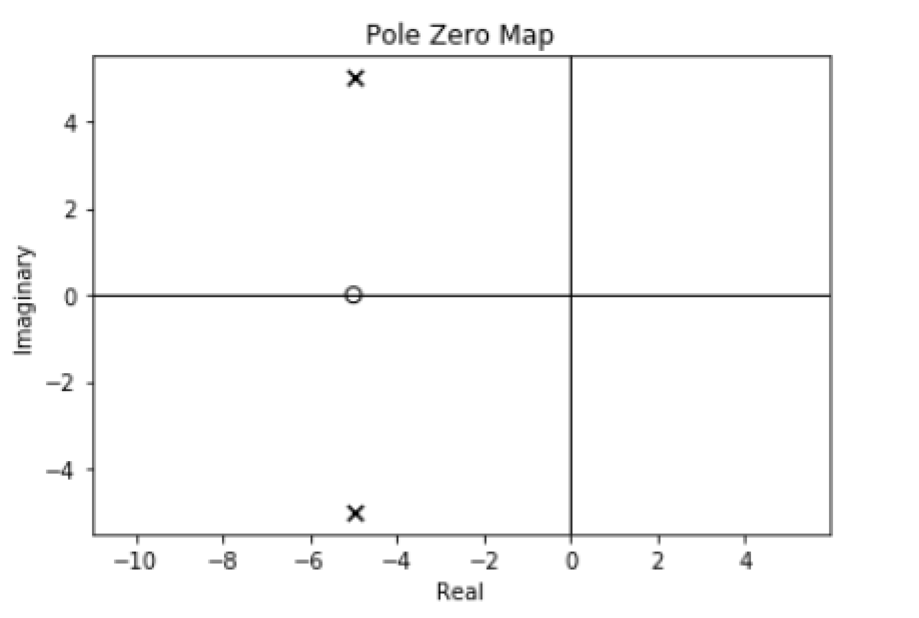




*Ver Controle_aula10_ex1.ipynb

3. Polos complexos conjugados real(p) < 0

$$G_3(s) = \frac{k_1}{(s+\sigma-j\omega)} + \frac{k_2}{(s+\sigma+j\omega)}$$



Equação característica

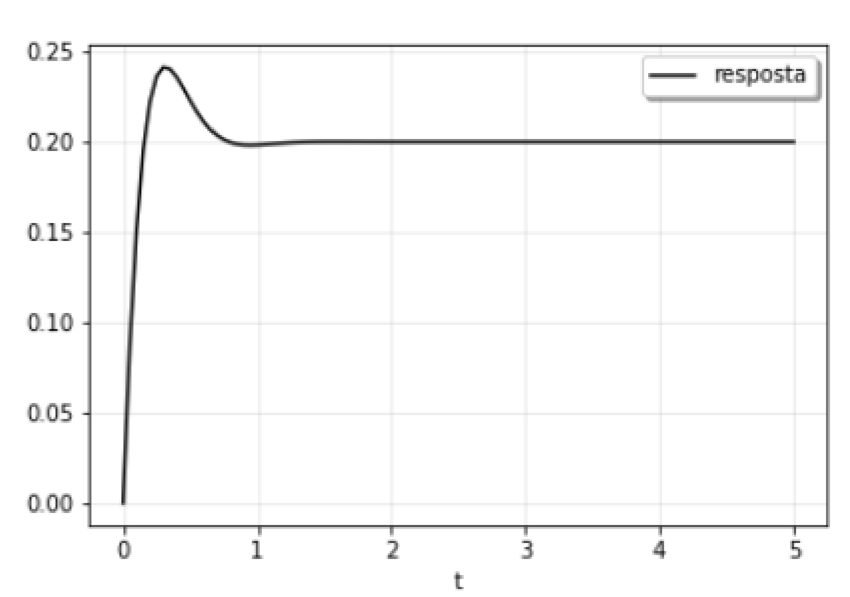
$$s+\sigma \pm j\omega = 0$$

Polos

$$p = -\sigma \pm j\omega$$

Resposta

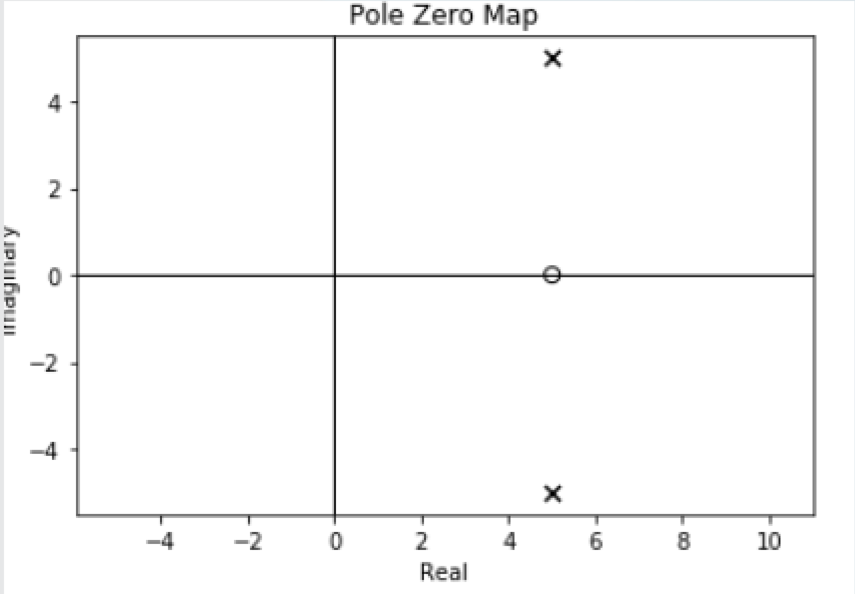
$$k_1 e^{-\sigma+j\omega\ t} + k_2 e^{-\sigma-j\omega\ t} + Ae^{-\sigma\ t}\sin(\omega t + \phi)$$



*Ver Controle_aula10_ex1.ipynb

4. Polos complexos conjugados real(p) > 0

$$G_4(s) = \frac{k_1}{(s - \sigma - j\omega)} + \frac{k_2}{(s - \sigma + j\omega)}$$



Equação característica

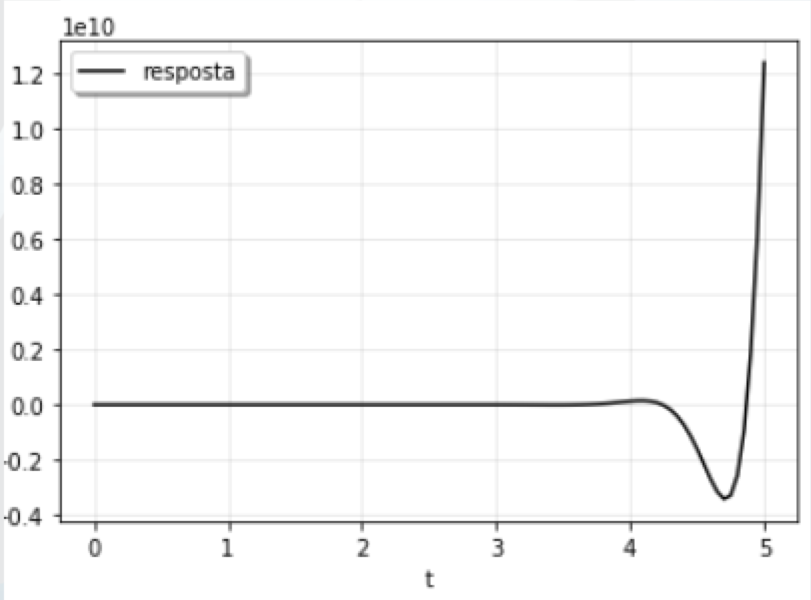
$$s - \sigma \pm j\omega = 0$$

Polos

$$p = \sigma \pm j\omega$$

Resposta

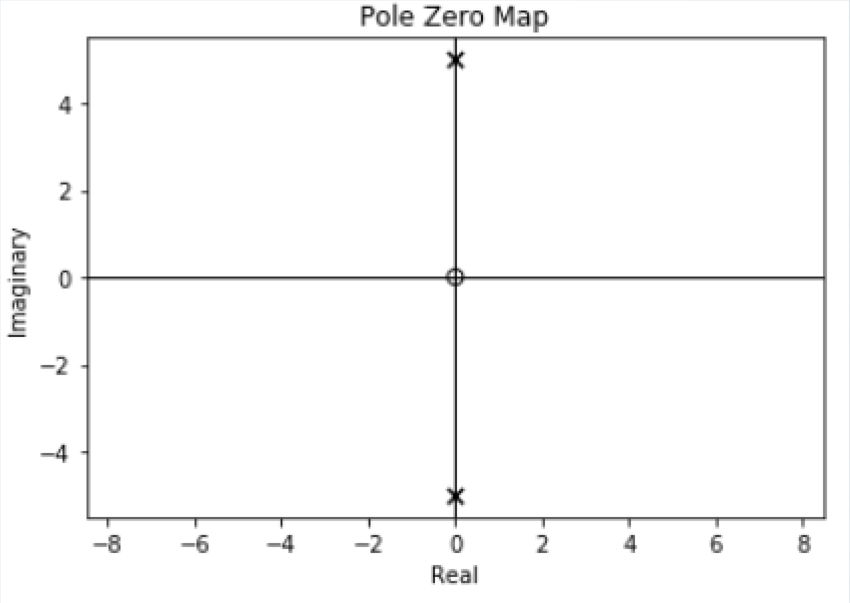
$$k_1 e^{\sigma + j\omega\ t} + k_2 e^{\sigma - j\omega\ t} + A e^{\sigma\ t} \sin(\omega t + \phi)$$



*Ver Controle_aula10_ex1.ipynb

5. Polos imaginários real(p)=0

$$G_5(s) = \frac{k_1}{(s - j\omega)} + \frac{k_2}{(s + j\omega)}$$



Equação característica

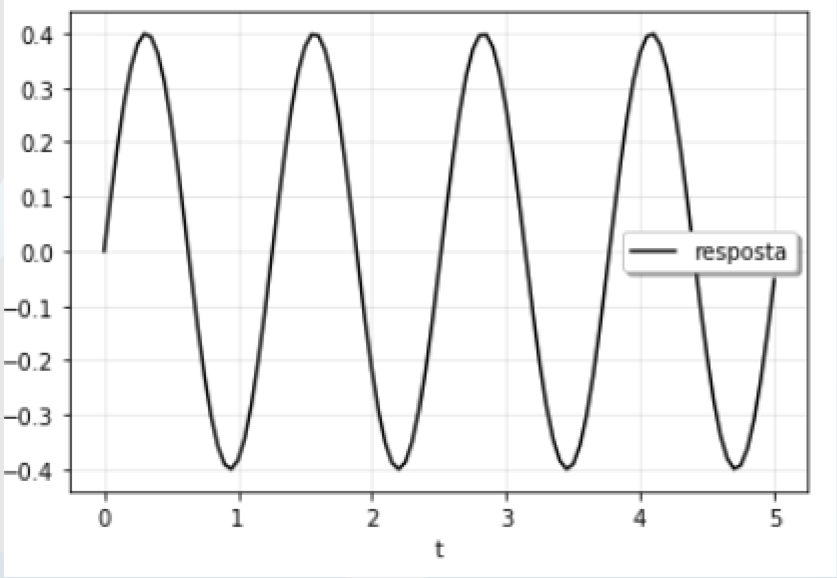
$$s \pm j\omega = 0$$

Polos

$$p = \pm j\omega$$

Resposta

$$ke^{j\omega\ t} + ke^{-j\omega\ t} + \text{Asin}\ (\omega t + \phi)$$

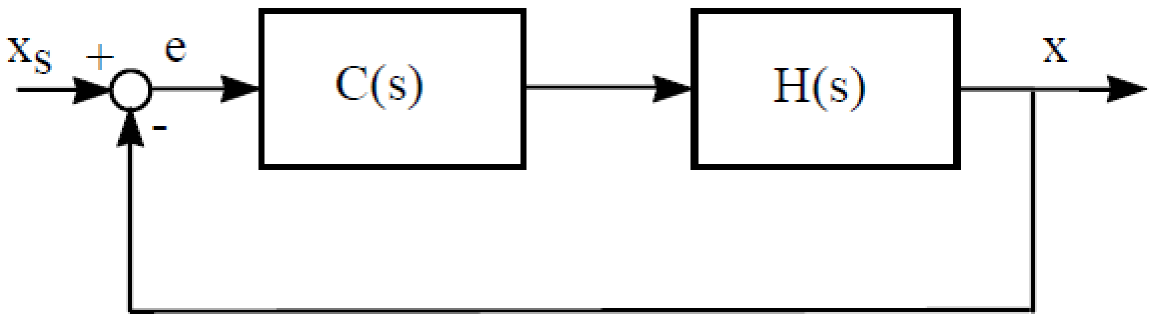


*Ver Controle_aula10_ex1.ipynb

Critério de estabilidade

Condição de estabilidade	$p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ $i = 1 \ldots n$
ESTÁVEL	$\sigma_i < 0$ (todos!)
MARGINALMENTE ESTÁVEL/INSTÁVEL	$\sigma_i = 0$ (pelo menos 1) • Nenhum $\sigma_i > 0$ • Nenhum polo múltiplo no eixo $j\omega$
INSTÁVEL	$\sigma_i > 0$ (pelo menos 1) $\sigma_i = 0$ polo múltiplo no eixo $j\omega$

Exemplo 1



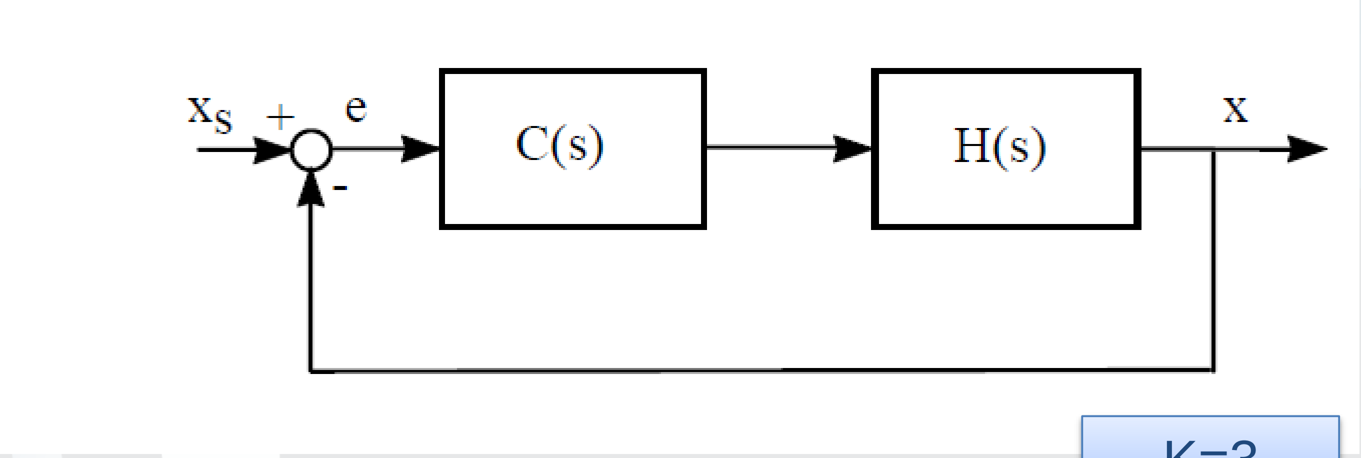
$$\frac{X}{X_s}(s) = G(s) = \frac{CH}{1 + CH}$$

Investigar
K=3 e K=7

$$C(s) = K$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Exemplo 1



K=3

$$\frac{X}{X_s}(s) = \frac{\frac{3}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{3}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{3}{s^3+3s^2+2s+3}$$

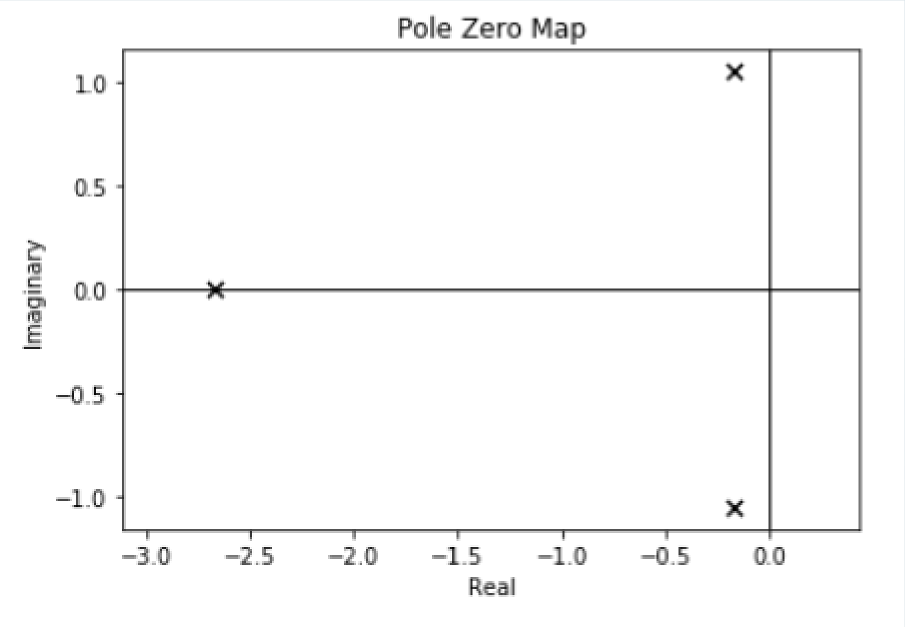
$$s^3+3s^2+2s+3=0 \quad \begin{cases} p_1 = -2.67 \\ p_{2,3} = -0.164 \pm 1.047j \end{cases}$$

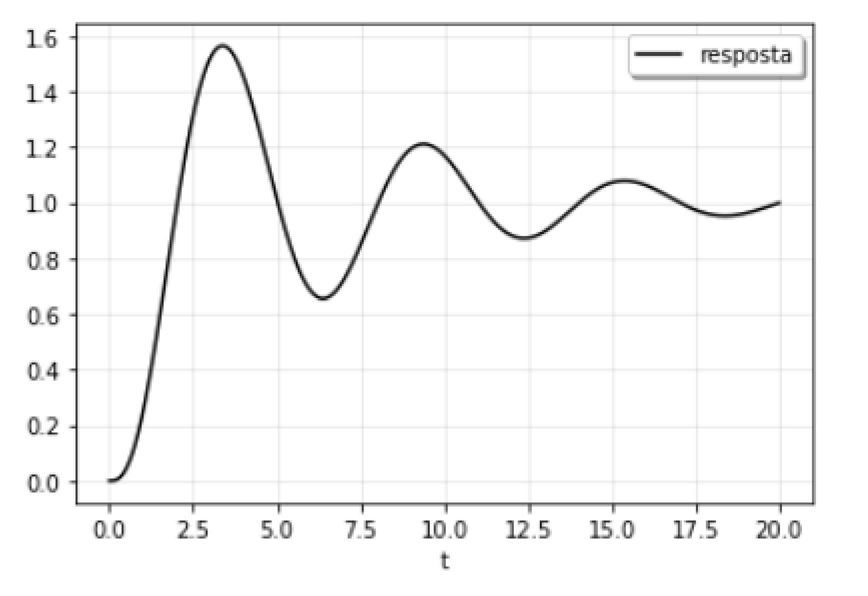
*Ver Controle_aula10_ex2.ipynb

Exemplo 1

$$\frac{X}{X_s}(s) = \frac{3}{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}$$

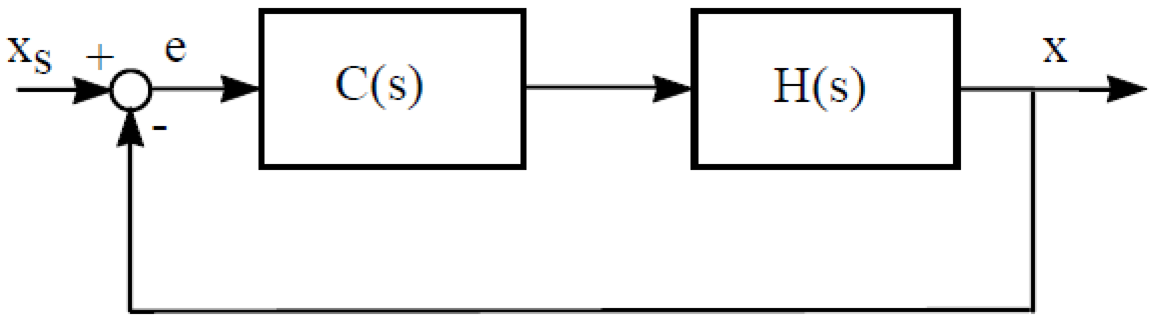
$$\begin{cases} p_1 = -2.67 \\ p_{2,3} = -0.164 \pm 1.047j \end{cases}$$





*Ver Controle_aula10_ex2.ipynb

Exemplo 1



K=7

$$\frac{X}{X_s}(s) = \frac{\dfrac{7}{s(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{7}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{7}{s^3+3s^2+2s+7}$$

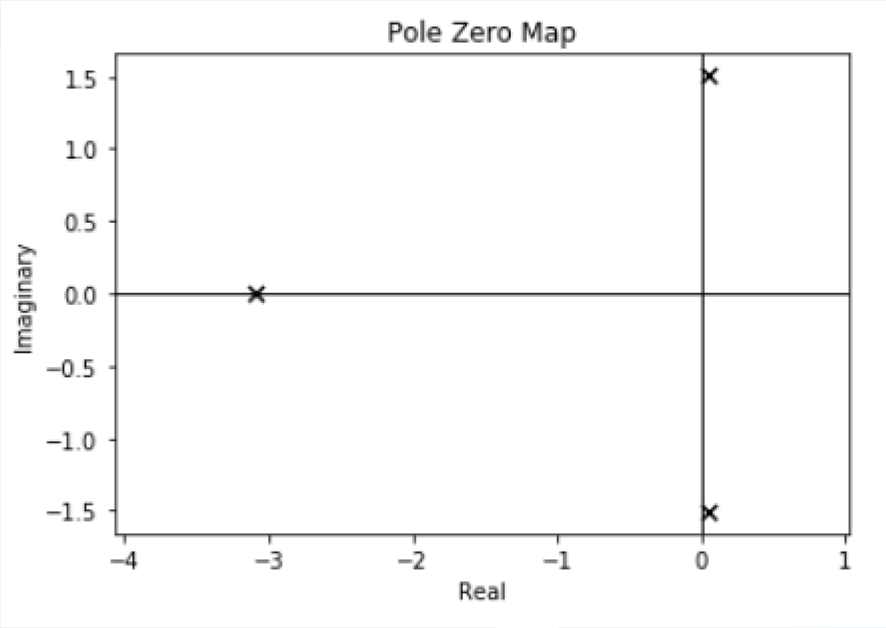
$$s^3+3s^2+2s+7=0 \quad \begin{cases} p_1 = -3.087 \\ p_{2,3} = 0.043 \pm 1.5j \end{cases}$$

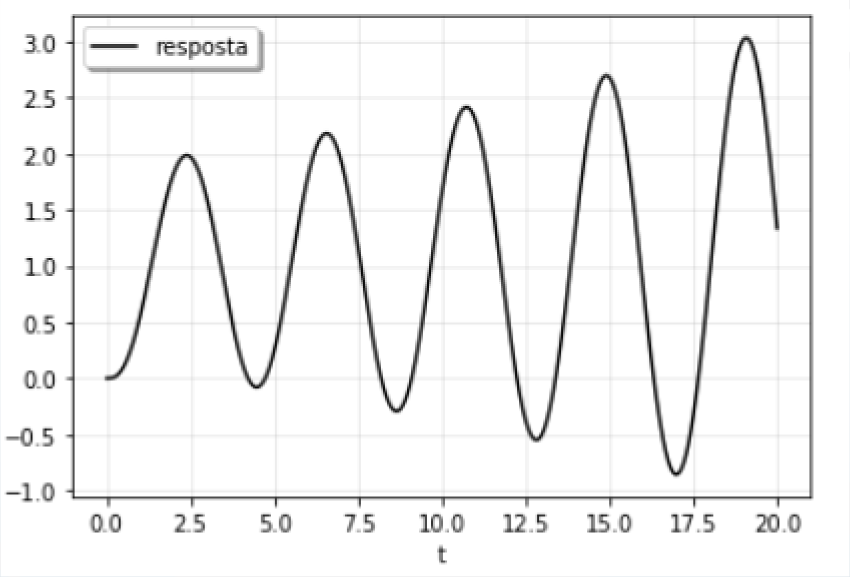
*Ver Controle_aula10_ex2.ipynb

Exemplo 1

$$\frac{X}{X_s}(s) = \frac{7}{s^3 + 3s^2 + 2s + 7}$$

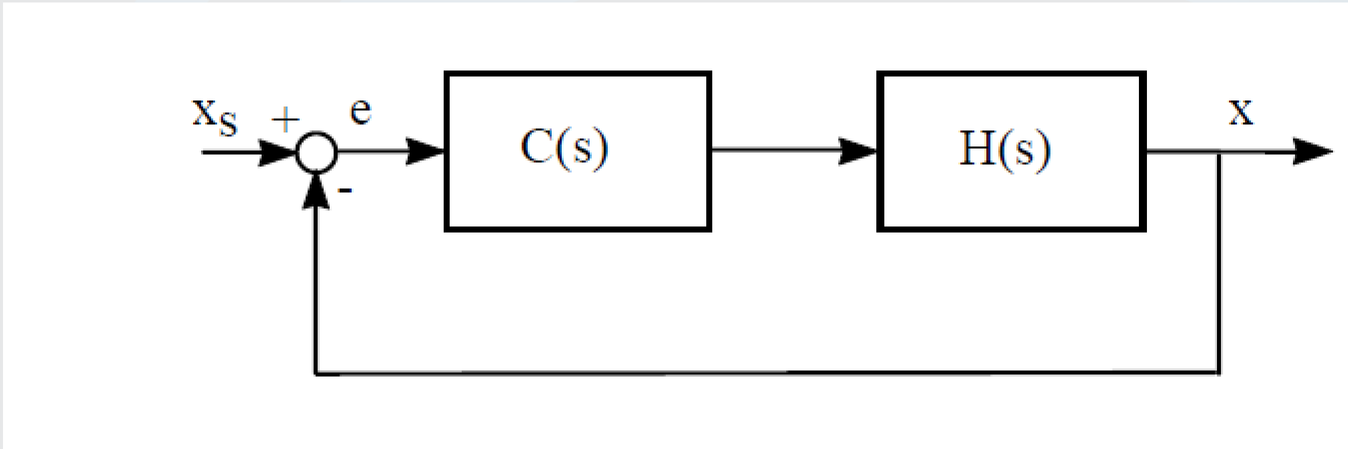
$$\begin{cases} p_1 = -3.087 \\ p_{2,3} = 0.043 \pm 1.5j \end{cases}$$





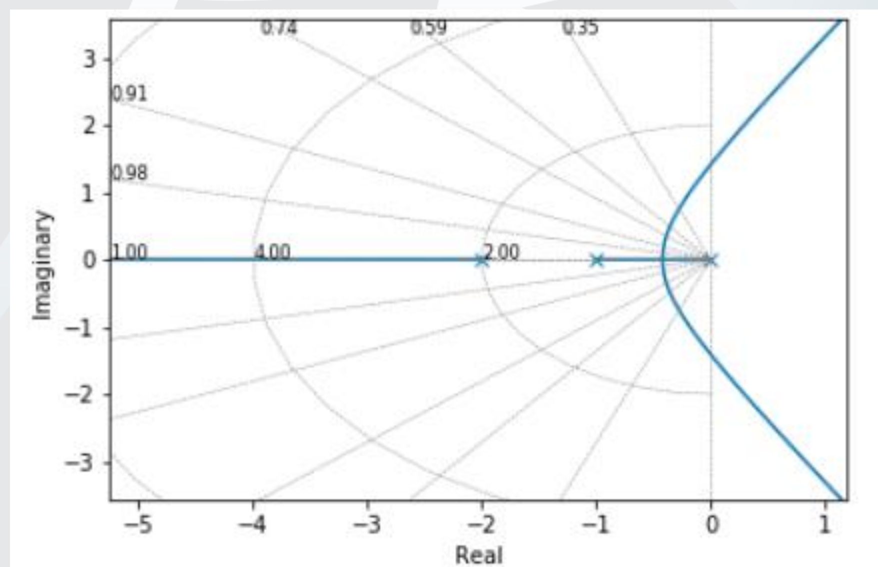
*Ver Controle_aula10_ex2.ipynb

Exemplo 1



E se eu variar o K?

$$\frac{X}{X_s}(s) = G(s) = \frac{CH}{1 + CH}$$



$$C(s) = K \qquad \boxed{0 \leq K < \infty}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

*Ver Controle_aula10_ex2.ipynb