MAT0225 - Funções Analíticas

Lista 1

2º Semestre de 2023

(1) Descreva graficamente o conjunto de todos os complexos z tais que:

(a) $z^3 = \overline{z}^3$; (b) $\overline{z} = -z$; (c) $|z| < 1 - \text{Re}(z)$

(d) $z^4 = i$; (e) $z^8 = -1$; (f) $32z^5 = (z+1)^5$.

(g) $|z + 1 - i| = 1$ (h) $|z - 4i| \geq 4$ (i) $|\overline{z} - 2 + 3i| = 4$

(2) Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações e represente no plano complexo as raízes obtidas.

(a) $x^2 + 25 = 0$ (b) $x^4 - 16 = 0$ (c) $x^4 - 1 = 0$

(d) $2x^2 - 6x + 5 = 0$ (e) $x^6 - 8 = 0$ (f) $x^3 - 2 = 0$

(3) Calcule os quocientes:

(a) $\dfrac{5-2i}{3+4i}$ (b) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (c) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$

(4) As raízes quadradas de um número complexo da forma $z = a + bi$ podem ser obtidas explicitamente em analogia à seguinte fórmula de transformação de radicais duplos:

$$\sqrt{x \pm \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}},$$

válida para todos x e y reais com $x - \sqrt{y} \geq 0$.

(a) Prove que, se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $z^2 = a + bi$, então

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$$

se $b \neq 0$.

(b) Calcule as raízes quadradas de $3 - 4i$, $1 + i$ e $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

(5) Sejam z e w números complexos. Prove que

(a) $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$.

(b) $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$.

(c) $|1+z\overline{w}|^2-|z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$.

(d) $|z-w|^2-|z+\overline{w}|^2 = -4\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)$.

(6) Sejam z e w complexos no disco fechado unitário tais que $|z-w| \geq 1$. Prove que $|z+w| \leq \sqrt{3}$.

(7) Sejam a e z complexos tais que $|a| < 1$ e $|z| \leq 1$. Prove que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1.$$

(8) Sejam a e d números reais. Prove que

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos(a+kd) = \dfrac{\mathrm{sen}\left(n\cdot\frac{d}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \cos\left(\dfrac{2a+(n-1)\cdot d}{2}\right)$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{sen}(a+kd) = \dfrac{\mathrm{sen}\left(n\cdot\frac{d}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \mathrm{sen}\left(\dfrac{2a+(n-1)\cdot d}{2}\right)$.

(9) Prove que três números complexos distintos z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero no plano complexo se, e somente se, $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$.

(10) Ache, para cada $n \geq 2$, o conjunto de todos os $z \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{z} = z^{n-1}$.

(11) Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Mostre que

(a) $|z_1|^2 = \mathrm{Re}(z_1)^2+\mathrm{Im}(z_1)^2$ (b) $\mathrm{Re}(z_1) = \dfrac{z_1+\overline{z_1}}{2}$ (c) $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{z_1-\overline{z_1}}{2i}$

(d) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ (e) $|z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$.

(12)

(a) Mostre que as raízes de $(z+1)^5+z^5 = 0$ estão todas sobre a linha $\mathrm{Re}(z) = -1/2$. Estude se vale a mesma coisa para $(z+1)^m+z^m = 0$, onde $m \geq 1$ é um natural.

(b) Sejam $a \neq b$ dois números reais fixados. Mostre que os polinômios $(z+a)^m+(z+b)^m$ possuem todas as raízes numa reta vertical que passa pelo ponto médio entre $-a$ e $-b$.

(13)

(a) Se $|z+3+4i| = 6$, determine o menor valor possível de $|z|$.

(b) Se $|z| < 2$, mostre que $\left|z^3+3z^2-2z+1\right| < 25$.

(c) Mostre que, se $|z| = 2$, então

$$\left|\frac{1}{z^4-4z+3}\right| \leq \frac{1}{3}$$

(14) Escolha adequadamente 3 números complexos, multiplique-os e, olhando para o resultado da sua conta, conclua que:

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi.$$

(15) Suponha que o polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[x]$ dado por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0$$

possui todas as suas raízes numa reta vertical do plano complexo. Descubra que reta é essa.

(16) Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio de grau $n \geq 1$ com raízes (não necessariamente distintas) $z_1, \ldots, z_n$. Definimos o centróide do polinômio p (em símbolos $\mathbf{z}_p$) por:

$$\mathbf{z}_p = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}.$$

Mostre que, se o grau de p é pelo menos 2, o centróide de p coincide com o centróide de p'.

(17) Sejam

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{e} \quad \omega_\ell = \cos\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right), k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

duas raízes n-ésimas da unidade. Prove que $\omega_k \cdot \omega_\ell = \omega_{k+\ell}$, onde a adição é módulo n.

(18) Mostre que, se ω é uma raiz n-ésima da unidade qualquer, então

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

(19)

(a) Determine todos os complexos z para os quais existe um polinômio não constante p de coeficientes reais não-negativos tal que $p(z) = 0$.

(b) Determine todos os complexos z para os quais existe um polinômio p de coeficientes reais positivos tal que $p(z) = 0$.

(20) Prove que, se um tabuleiro $m \times n$ pode ser preenchido usando peças de tamanho $1 \times d$ sem intersecções, então $d \mid m$ ou $d \mid n$.
Sugestão: use raízes d-ésimas da unidade.

(21) Seja p um polinômio não-constante de grau par (e coeficientes reais). Prove que existem três pontos no gráfico de p que formam um triângulo equilátero.

(22) Determine todos os polinômios de coeficientes complexos e grau 3 tais que suas raízes formam um triângulo equilátero no plano complexo.

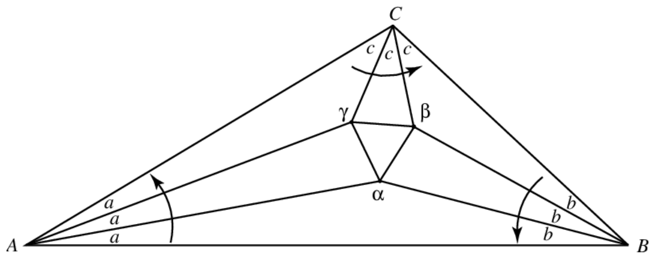
(23) Prove que a área do triângulo formada pelos complexos distintos z_1, z_2 e z_3, que estão orientados em ordem anti-horária, é dada por

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

(24) Seja n um inteiro não-negativo. Prove que existe um polinômio T_n de coeficientes inteiros tal que $T_n(\cos x) = \cos nx$ para todo x real. Qual é o coeficiente líder de T_n? Qual é o coeficiente independente de T_n? Prove que, se $\cos nx$ é irracional, então $\cos x$ é irracional.

(25) Prove que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ considerando uma certa raiz quinta da unidade. Suponha agora que x é a medida, em graus, de um ângulo, e que x seja um inteiro que não é múltiplo de 5. Prove que $\cos(2x)$ é irracional.

(26) (Teorema de Morley) Seja ABC um triângulo qualquer. Prove que o triângulo cujos vértices são os pontos de encontro das trissetrizes adjacentes a cada lado de ABC é equilátero (ver figura abaixo).



(27) Seja $p > 2$ um número primo e $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Calcule a quantidade de subconjuntos de A que possuem tamanho p e cuja soma de seus elementos é múltipla de p.

(28) Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ complexos distintos que estão sobre uma circunferência C de raio 1 no plano complexo e que são as raízes (simples) de um polinômio mônico p de coeficientes complexos tal que $|p(z)| \leq 2$ para todo $z \in C$. Prove que os z_i são os vértices de um polígono regular.

(29) Seja z um número complexo tal que $|z+1| > 2$. Prove que $\left|z^3 + 1\right| > 1$.

(30) Encontre o mínimo de $\max(|1+z|, |1+z^2|)$ tomado sobre todos os números complexos.

(31) Seja $n \geq 2$ um inteiro e considere um n-ágono regular inscrito num círculo unitário. Prove que o produto do comprimento das $n-1$ diagonais com extremidade em um vértice fixo é igual a n.

(32)

(a) Seja $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Considerando $(1-z)P(z)$, prove que todas as raízes de P estão dentro do disco unitário.

(b) Prove que o mesmo vale para qualquer polinômio da forma $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, onde os a_i são reais e $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

(33) Prove que

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{rk} = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} (1 + \omega^j)^n,$$

onde $\omega = \cos(2\pi/r) + i\mathrm{sen}(2\pi/r)$. Mais geralmente,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{a+rk} = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\omega^{-ja}(1+\omega^j)^n.$$

(34) Seja n um inteiro positivo.

(a) Prove que existem polinômios p_n e q_n de coeficientes reais tais que, para todo $x \in (0, \pi/2)$,

$$\cos(nx) = p_n(\tan x)\cdot\cos^n x$$

e

$$\mathrm{sen}(nx) = q_n(\tan x)\cdot\cos^n x.$$

(b)

$$p_n(x) = \frac{(1+ix)^n + (1-ix)^n}{2}$$

e

$$q_n(x) = \frac{(1+ix)^n - (1-ix)^n}{2i}.$$

(c) Se $n > 1$, então $p_n' = -nq_{n-1}(x)$ e $q_n' = np_{n-1}(x)$.

(35)

(a) Sejam a, b, c, d complexos. Prove que

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d).$$

(b) (Teorema de Ptolomeu) Sejam A, B, C e D pontos do plano. Prove que

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} \geq \overline{AC}\cdot\overline{BD},$$

com igualdade se, e somente se, os pontos estão em uma mesma circunferência ou reta, em ordem alfabética.