

Lista 2 - Eletromag I

① Mostre as seguintes identidades vetoriais:

Ⓐ $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$, como $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$, $\hat{e}_i = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

Assim:

$$\vec{A} \times \vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \times \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 A_i A_i \hat{e}_i \times \hat{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i A_i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = 0, \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{perm par } 123 \\ -1, & \text{perm impar } 123 \\ 0, & \text{se indices iguais} \end{cases}$$

Ⓑ $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i; \quad \vec{B} = \sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \quad \text{logo:}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k$$

Ⓒ Calculemos agora $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \sum_{s=1}^3 A_s \hat{e}_s \cdot \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i A_s B_j \hat{e}_s \cdot \hat{e}_k \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i A_s B_j \delta_{sk} \end{aligned}$$

Como indice é unico, então $s=i$, logo δ_{ik} , assim:

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{iji} A_i A_i B_j = 0$$

$$\textcircled{C} \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(\sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \delta_{ij}$$

Como o delta de Kronecker é simétrico, ou seja:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

e como A_i e B_j são escalares, temos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{j,i=1}^3 B_j A_i \delta_{ji} = \sum_{j,i=1}^3 B_j A_i \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\textcircled{d} \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{l,m,n=1}^3 \epsilon_{lmn} A_l (\vec{B} \times \vec{C})_m \hat{e}_n$$

onde:

$$(\vec{B} \times \vec{C})_m = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijm} B_i C_j$$

logo:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{l,m,n=1}^3 \epsilon_{lmn} A_l \left(\sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijm} B_i C_j \right) \hat{e}_n$$

$$= \sum_{l,m,n,i,j=1}^3 \epsilon_{lmn} \epsilon_{ijm} A_l B_i C_j \hat{e}_n$$

$$= - \sum_{l,n,i,j=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \epsilon_{mln} \epsilon_{mij} \right) A_l B_i C_j \hat{e}_n$$

$$= - \sum_{l,n,i,j=1}^3 (\delta_{li} \delta_{nj} - \delta_{lj} \delta_{ni}) A_l B_i C_j \hat{e}_n$$

$$= \sum_{l,n,i,j=1}^3 (\delta_{lj} \delta_{ni} A_l B_i C_j \hat{e}_n - \delta_{li} \delta_{nj} A_l B_i C_j \hat{e}_n)$$

$$= \sum_{l,i,j=1}^3 A_l C_j \delta_{ij} B_i \hat{e}_i - \sum_{l,i,j=1}^3 A_l B_i \delta_{li} C_j \hat{e}_j$$

$$= \sum_{i=1}^3 B_i \left(\sum_{l,j=1}^3 A_l C_j \delta_{ij} \right) \hat{e}_i - \sum_{j=1}^3 C_j \left(\sum_{l,i=1}^3 A_l B_i \delta_{li} \right) \hat{e}_j$$

$$= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

2

Prove os seguintes resultados de cálculo vetorial:

a) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$

c) $\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}$

nos quais \vec{F} , \vec{G} e f dependem de \vec{x} .

a) Provemos primeiramente $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \sum_{l,m,n} \epsilon^{lmn} \partial_{x^l} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^m \hat{x}_n,$$

onde $(\vec{\nabla} \times \vec{F})^m$ é a m -ésima coordenada do rotacional de \vec{F} , ou seja

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})^m = \sum_{i,j} \epsilon^{ijm} \partial_{x^i} F^j$$

assim

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \sum_{l,m,n} \epsilon^{lmn} \partial_{x^l} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^m \hat{x}_n = \sum_{l,m,n} \epsilon^{lmn} \partial_{x^l} \left(\sum_{i,j} \epsilon^{ijm} \partial_{x^i} F^j \right) \hat{x}_n \\ &= \sum_{l,m,n,i,j} \epsilon^{lmn} \epsilon^{ijm} \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n = - \sum_{l,m,n,i,j} \epsilon^{mln} \epsilon^{mij} \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n \end{aligned}$$

1

onde foi usado que $\epsilon^{lmn} = -\epsilon^{mln}$ devido a permutação ímpar dos índices e $\epsilon^{ijm} = \epsilon^{mij}$ devido a permutação par dos índices. Assim, separando a soma sobre m , temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = - \sum_{l,n,i,j} \left(\sum_m \epsilon^{mln} \epsilon^{mij} \right) \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n,$$

usando a seguinte propriedade do símbolo de Levi-Civita

$$\sum_m \epsilon^{mln} \epsilon^{mij} = \delta_{li} \delta_{nj} - \delta_{lj} \delta_{ni},$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= - \sum_{l,n,i,j} (\delta_{li} \delta_{nj} - \delta_{lj} \delta_{ni}) \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n = \sum_{l,n,i,j} (\delta_{lj} \delta_{ni} - \delta_{li} \delta_{nj}) \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n \\ &= \sum_{l,n,i,j} \delta_{lj} \delta_{ni} \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n - \sum_{l,n,i,j} \delta_{li} \delta_{nj} \partial_{x^l} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_n \\ &= \sum_{l,n} \partial_{x^l} \partial_{x^n} F^l \hat{x}_n - \left(\sum_l \partial_{x^l} \partial_{x^i} \delta_{li} \right) \left(\sum_n F^n \hat{x}_n \right) \end{aligned}$$

Para o somatório a esquerda, suponhamos que F seja de classe C^2 em \vec{x} , então o Teorema de Schwarz nos assegura que $\partial_{x^l} \partial_{x^n} F^l = \partial_{x^n} \partial_{x^l} F^l, \forall n, l$. Logo

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \sum_{l,n} \partial_{x^n} \partial_{x^l} F^l \hat{x}_n - \left(\sum_l \partial_{x^l} \partial_{x^i} \delta_{li} \right) \left(\sum_n F^n \hat{x}_n \right) \\ &= \left(\sum_n \partial_{x^n} \hat{x}_n \right) \left(\sum_l \partial_{x^l,i} F^l \delta_{li} \right) - \left(\sum_l \partial_{x^l} \partial_{x^i} \delta_{li} \right) \left(\sum_n F^n \hat{x}_n \right) \\ \therefore \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \quad \square \end{aligned}$$

b) Provemos agora $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \sum_{i,l} \partial_{x^i} (\vec{F} \times \vec{G})^l \delta_{il} = \sum_{i,l} \partial_{x^i} \left(\sum_{j,k} \epsilon^{jkl} F^j G^k \right) \delta_{il} = \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{jkl} \partial_{x^i} (F^j G^k) \delta_{il} \\ &= \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{jkl} [\partial_{x^i} (F^j) G^k + F^j \partial_{x^i} G^k] \delta_{il} \\ &= \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{jkl} \partial_{x^i} (F^j) G^k \delta_{il} + \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{jkl} F^j \partial_{x^i} G^k \delta_{il}, \end{aligned}$$

no somatório a esquerda troquemos os seguintes índices $\partial_{x^i} \rightarrow \partial_{x^l}$, $G^k \rightarrow G^i$ e $\delta_{il} \rightarrow \delta_{ki}$. Façamos, também, a permutação par $\epsilon^{jkl} \rightarrow \epsilon^{ljk}$. Já para o somatório a direita troquemos $\partial_{x^i} \rightarrow \partial_{x^k}$, $G^k \rightarrow G^j$ e $F^j \rightarrow F^i$. Façamos, também, uma permutação ímpar $\epsilon^{jkl} \rightarrow \epsilon^{kjl}$ e uma permutação $\delta_{il} \rightarrow \delta_{li}$ que não altera o sinal. Assim

2

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{ljk} \partial_{x^l} (F^j) G^i \delta_{ki} - \sum_{i,l,j,k} \epsilon^{kjl} \partial_{x^k} (G^j) F^i \delta_{li} \\ &= \sum_{k,i} \left(\sum_{l,j} \epsilon^{ljk} \partial_{x^l} F^j \right) G^i \delta_{ki} - \sum_{l,i} \left(\sum_{k,j} \epsilon^{kjl} \partial_{x^k} G^j \right) F^i \delta_{li} \\ &= \sum_{k,i} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^k G^i \delta_{ki} - \sum_{l,i} (\vec{\nabla} \times \vec{G})^l F^i \delta_{li} \\ &\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F} \quad \square \end{aligned}$$

c) Por fim, provemos $\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f \vec{F}) &= \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} \partial_{x^i} (f F^j) \hat{x}_k = \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} [\partial_{x^i} (f) F^j + f \partial_{x^i} F^j] \hat{x}_k \\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} \partial_{x^i} (f) F^j \hat{x}_k + \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} f \partial_{x^i} F^j \hat{x}_k \\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} f)^i F^j \hat{x}_k + f \sum_{i,j,k} \epsilon^{ijk} \partial_{x^i} F^j \hat{x}_k, \end{aligned}$$

onde $(\vec{\nabla} f)^i$ é a i -ésima coordenada do gradiente de f em \vec{x} . Portanto

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad \square$$

3) (Exemplo 1.5 Kleber Vol I adaptado)

$$\text{Seja } \psi(x, y, z) = 2x - 3y^2 + 4xyz$$

a) Calculemos a seguinte integral:

$$I = \iiint \psi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \quad 0 < z < y, \quad 0 < y < x \\ \text{e } 0 < x < r$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^r dx \int_0^x dy \int_0^y dz [2x - 3y^2 + 4xyz] = \int_0^r dx \int_0^x dy \left[2xz - 3y^2z + 4xy \frac{z^2}{2} \right]_0^y \\ &= \int_0^r dx \int_0^x dy \left[2xy - 3y^3 + 2xy^2 \right] = \int_0^r dx \left[2x \frac{y^2}{2} - \frac{3y^4}{4} + \frac{2xy^3}{3} \right]_0^x \\ &= \int_0^r dx \left[x^3 - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^4}{3} \right] = \int_0^r dx \left[-\frac{x^4}{12} + x^3 \right] \\ &= \left[-\frac{x^5}{5 \cdot 12} + \frac{x^4}{4} \right]_0^r \Rightarrow \underline{I = -\frac{r^5}{60} + \frac{r^4}{4}} \end{aligned}$$

Exemplo 1.5. Seja a função escalar

basta substituir
 $\Phi \rightarrow \Psi$ ← $\Phi(x, y, z) = 2x - 3y^2 + 4xyz$

b) ~~a)~~ Encontre $\nabla\Phi$.

O gradiente de Φ é dado pela expressão 1.51, isto é,

84

1.6. EXEMPLOS RESOLVIDOS

87

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla\Phi = & \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} [2x - 3y^2 + 4xyz] \\ & + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} [2x - 3y^2 + 4xyz] + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} [2x - 3y^2 + 4xyz] \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\nabla\Phi = [2 + 4yz] \hat{\mathbf{i}} + [-6y + 4xz] \hat{\mathbf{j}} + 4xy \hat{\mathbf{k}}$$

c) ~~g)~~ Qual é a integral de linha de $\nabla\Phi$ dos pontos $(0, 0, 0)$ até $(1, 0, 0)$, se for utilizada uma reta como caminho entre esses dois pontos?

Queremos calcular a integral

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

Existem dois modos de calcular essa integral. O primeiro é o método direto, considerando $d\vec{\ell} = dx \hat{i}$, e $y = z = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 \left\{ [2 + 4 \cdot 0 \cdot 0] \hat{i} + [-6 \cdot 0 + 4x \cdot 0] \hat{j} + 4x \cdot 0 \hat{k} \right\} \cdot dx \hat{i} \\ &= \int_0^1 2 dx \\ &= (2x)_0^1 \end{aligned}$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = 2$$

O outro método se vale do fato de que a integral de linha de $\nabla\Phi$ independe do caminho, como mostra a equação 1.66,

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0)$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= \Phi(1, 0, 0) - \Phi(0, 0, 0) \\ &= (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0) - (2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0) \end{aligned}$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = 2$$

que concorda com o resultado anterior.

d) ~~g)~~ $\nabla\Phi$ é conservativo?

Pelo resultado anterior, percebemos que, se o caminho de integração for fechado, a integral se anula, e isto caracteriza um campo conservativo. Além disso, calculando o rotacional de $\nabla\Phi$, obtemos, utilizando a propriedade 1.58b,

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$



4) Calcule o divergente e o rotacional para o campo vetorial $\vec{v} = r^n \hat{r}$. Interprete geometricamente o resultado do rotacional e verifique a consistência do seu divergente através do teorema da divergência. Com o resultado, obtenha o valor da integral:

1ª parte Problema 1.63 Griffiths (a versão em inglês)
2ª parte Problema 1.49 (a integral)

$$J = \int_{\mathcal{V}} dV e^{-r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right),$$

onde \mathcal{V} é a esfera de raio r_0 centrada na origem.

Obtenhamos, primeiramente, $\vec{\nabla}$ em coordenadas esféricas. Para isto tomemos a seguinte parametrização

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

de forma que os versores das coordenadas esféricas \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ são definidos como

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + \cos \varphi \sin \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{aligned}$$

Assim, analogamente a questão anterior, projetemos $\vec{\nabla} = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$ nesses versores

$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} = \cos \varphi \sin \theta \partial_x + \sin \varphi \sin \theta \partial_y + \cos \theta \partial_z,$$

onde podemos notar que $\cos \varphi \sin \theta = \partial_r x$, $\sin \varphi \sin \theta = \partial_r y$ e $\cos \theta = \partial_r z$, assim

$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} = (\partial_r x) \partial_x + (\partial_r y) \partial_y + (\partial_r z) \partial_z \Rightarrow \hat{r} \cdot \vec{\nabla} = \partial_r$$

Analogamente, temos

7

$$\hat{\theta} \cdot \vec{\nabla} = \cos \varphi \cos \theta \partial_x + \sin \varphi \cos \theta \partial_y - \sin \theta \partial_z,$$

onde temos que $\cos \varphi \cos \theta = \frac{1}{r} \partial_\theta x$, $\sin \varphi \cos \theta = \frac{1}{r} \partial_\theta y$ e $-\sin \theta = \frac{1}{r} \partial_\theta z$, então

$$\hat{\theta} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{1}{r} \partial_\theta x \right) \partial_x + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta y \right) \partial_y + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta z \right) \partial_z \Rightarrow \hat{\theta} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

Por fim

$$\hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} = -\sin \varphi \partial_x + \cos \varphi \partial_y,$$

que é fácil verificar que $-\sin \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi x$ e $\cos \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi y$, logo

$$\hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi x \right) \partial_x + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi y \right) \partial_y \Rightarrow \hat{\varphi} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$$

Então

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \partial_r + \hat{\theta} \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$$

Calculemos agora $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\hat{r} \partial_r + \hat{\theta} \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) \cdot r^n \hat{r},$$

Dedução não esperada na solução

Questão começa aqui.

agora não podemos fazer o produto escalar de maneira usual, pois \hat{r} não é constante, então devemos prosseguir da seguinte forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \hat{r} \cdot \partial_r (r^n \hat{r}) + \frac{1}{r} \hat{\theta} \cdot \partial_\theta (r^n \hat{r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\varphi} \cdot \partial_\varphi (r^n \hat{r}),$$

onde lembremos que $\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$, de forma que \hat{r} é constante em relação a ∂_r , mas não em relação a ∂_θ e ∂_φ , então

$$\partial_\theta \hat{r} = \partial_\theta (\cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) = \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + \cos \varphi \sin \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{z} = \hat{\theta}$$

e

$$\partial_\varphi \hat{r} = \partial_\varphi (\cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) = -\sin \varphi \sin \theta \hat{x} + \cos \varphi \sin \theta \hat{y} = \sin \theta \hat{\varphi}$$

Assim, como $\partial_\theta \hat{r} = \hat{\theta}$ e $\partial_\varphi \hat{r} = \sin \theta \hat{\varphi}$, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \hat{r} \cdot \hat{r} n r^{n-1} + \frac{1}{r} r^n \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} r^n \sin \theta \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = n r^{n-1} + r^{n-1} + r^{n-1}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (n + 2) r^{n-1} \quad \square$$

Calculemos também $\vec{\nabla} \times \vec{v}$

8

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\hat{r} \partial_r + \hat{\theta} \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) \times r^n \hat{r} \\ &= \hat{r} \times \partial_r (r^n \hat{r}) + \frac{1}{r} \hat{\theta} \times \partial_\theta (r^n \hat{r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\varphi} \times \partial_\varphi (r^n \hat{r}) \\ &= n r^{n-1} \hat{r} \times \hat{r} + r^{n-1} \hat{\theta} \times \hat{\theta} + r^{n-1} \hat{\varphi} \times \hat{\varphi} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad \square$$

Este resultado pode ser interpretado como de forma que o objeto sujeito ao campo vetorial \vec{v} está livre de rotações. \square

Podemos também verificar se o resultado do divergente que encontramos está de acordo com ao teorema do divergente, ou seja

$$\int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

Adotando \mathcal{V} como o volume de uma esfera de raio r_0 , temos que o lado direito é dado por

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r_0^n r_0^2 \sin \theta = 4\pi r_0^{n+2}$$

Já o lado esquerdo é dado por

$$\int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \int_0^{r_0} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (n + 2) r^{n-1} r^2 \sin \theta = 4\pi (n + 2) \int_0^{r_0} dr r^{n+1},$$

notemos agora que a primitiva da integral acima resulta, a menos de uma constante, em $\frac{1}{n+2} r^{n+2}$, que diverge para $n = -2$, então para $n \neq -2$

$$\int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 4 \pi r_0^{n+2}$$

Mas notemos que se $n = -2 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, assim na verdade temos

$$\int_{\mathcal{V}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 4 \pi r_0^{n+2}, & \text{se } n \neq -2 \\ 0, & \text{se } n = -2 \end{cases}$$

o que não está de acordo com o teorema do divergente, pois para $n = -2$

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} = 4 \pi r_0^0 = 4 \pi \quad \square$$

Restante
da
questão
4)

Problem 1.49

First method: use Eq. 1.99 to write $J = \int e^{-r} (4\pi\delta^3(\mathbf{r})) d\tau = 4\pi e^{-0} = \boxed{4\pi}$.

Second method: integrating by parts (use Eq. 1.59).

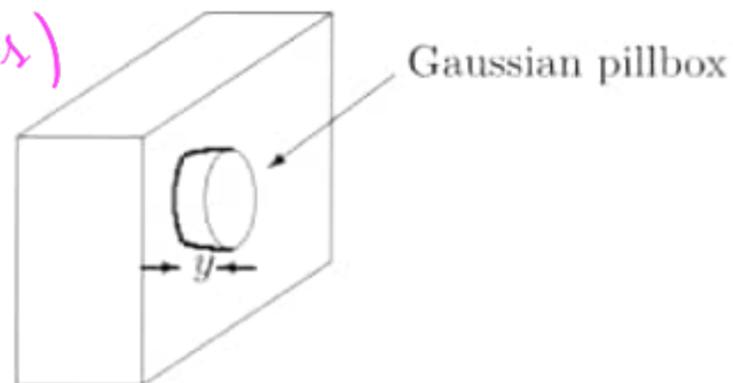
©2012 Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved. This material is protected under all copyright laws as they currently exist. No portion of this material may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher.

$$\begin{aligned} J &= - \int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \nabla(e^{-r}) d\tau + \oint_S e^{-r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{a}. \quad \text{But } \nabla(e^{-r}) = \left(\frac{\partial}{\partial r} e^{-r} \right) \hat{\mathbf{r}} = -e^{-r} \hat{\mathbf{r}}. \\ &= \int \frac{1}{r^2} e^{-r} 4\pi r^2 dr + \int e^{-r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} = 4\pi \int_0^R e^{-r} dr + e^{-R} \int \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi (-e^{-r}) \Big|_0^R + 4\pi e^{-R} = 4\pi (-e^{-R} + e^{-0}) + 4\pi e^{-R} = 4\pi \checkmark \quad (\text{Here } R = \infty, \text{ so } e^{-R} = 0.) \end{aligned}$$

5

Problem 2.17 On the xz plane $E = 0$ by symmetry. Set up a Gaussian "pillbox" with one face in this plane and the other at y .

Griffiths (inglês)

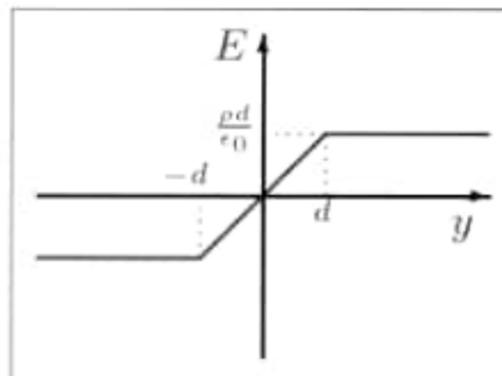


$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} A y \rho;$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} y \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{for } |y| < d).$$

©2012 Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved. This material is protected under all copyright laws as they currently exist. No portion of this material may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher.

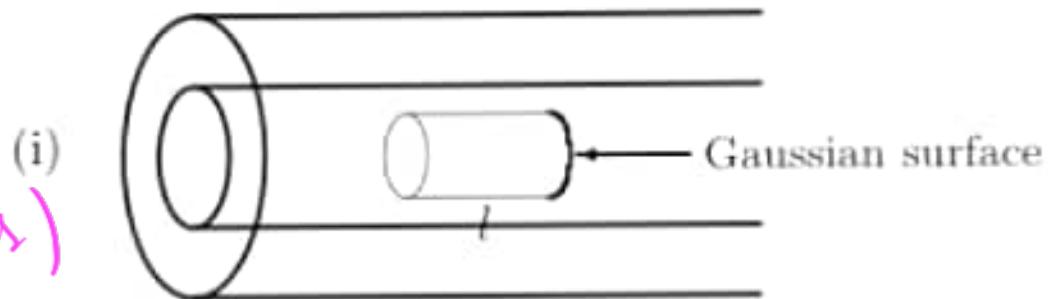
$$Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} A d \rho \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} d \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{for } y > d).$$



6

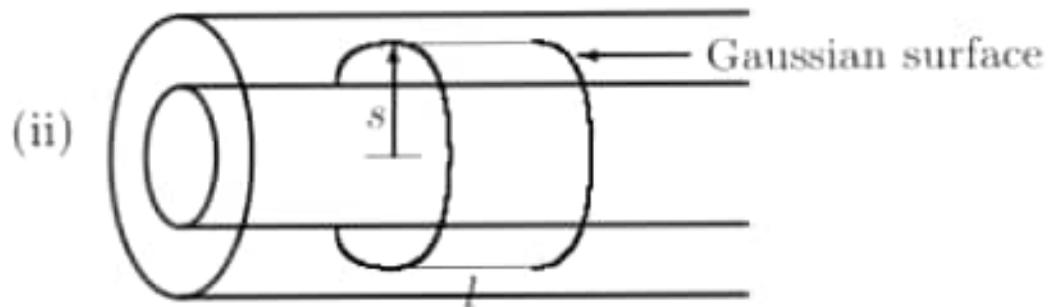
Problem 2.16

Griffiths (ingles)



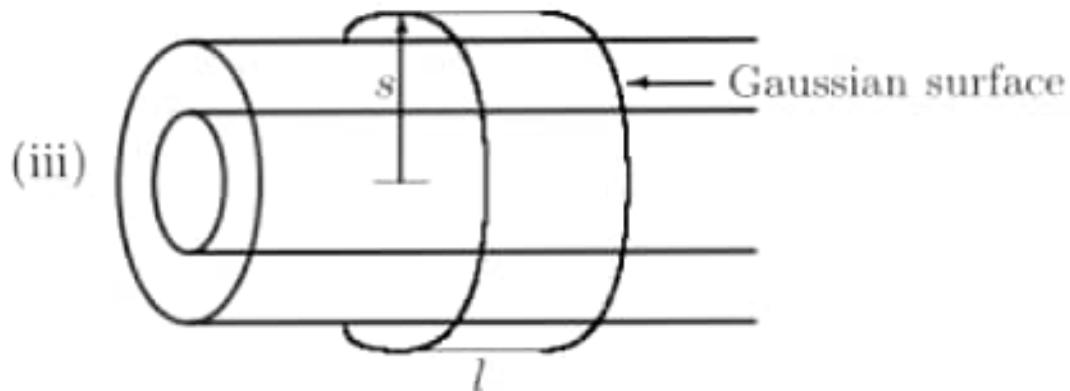
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi s^2 l;$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{s}}.$$



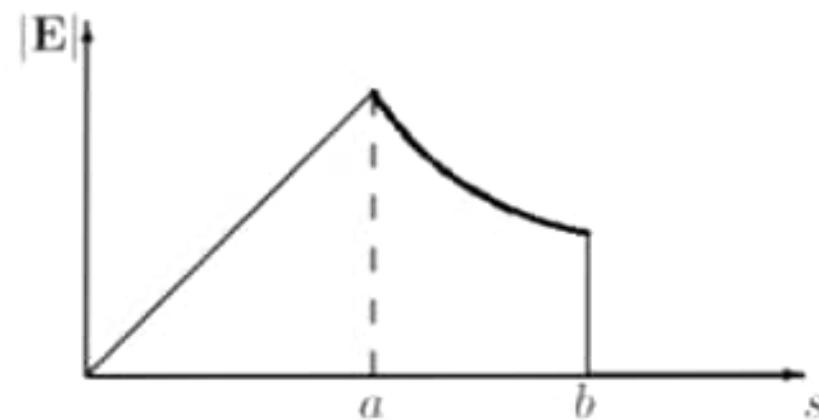
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi a^2 l;$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}.$$



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = 0;$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$



7) **Exemplo 4.9.** O modelo de Thomson, conhecido como “pudim de ameixas”, supunha que o átomo era formado por uma carga positiva distribuída de forma homogênea num volume esférico de raio R e que nessa “massa” os elétrons estariam incrustados. Considere o modelo de Thomson para o hidrogênio, e responda.

a) Qual é o campo elétrico a uma distância r quando $r > R$?

Como o átomo é eletricamente neutro, as cargas positivas estão em mesmo número que as cargas negativas, e o total líquido é nulo. Assim, fora do átomo, quando $r > R$, se considerarmos uma superfície gaussiana esférica de raio r , veremos que a carga total dentro da gaussiana é nula. O campo elétrico, se existisse, deveria ter uma simetria radial. Portanto, o único modo de a integral da lei de Gauss se anular ocorre quando $\vec{E} = 0$ fora do átomo.

b) Qual é o campo elétrico dentro do átomo, a uma distância r do centro?

O elétron do átomo de hidrogênio, no modelo de Thomson, deve estar situado em equilíbrio no centro do átomo, porque nesse local as forças elétricas se anulam em virtude da simetria esférica. Portanto, ao escrever a lei de Gauss, temos duas contribuições, uma do elétron no centro da esfera e outra da carga positiva distribuída no volume do átomo. A superfície gaussiana é uma esfera de raio r , como mostra a figura 4.12 abaixo. A lei de Gauss para esta superfície fica, considerando apenas a parte do campo gerada pela densidade volumétrica de carga positiva,

$$\oint_S \vec{E}_+ \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S E_+ \hat{r} \cdot \hat{r} dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_V dV$$

$$E_+ \oint_S dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_+ 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_+ = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

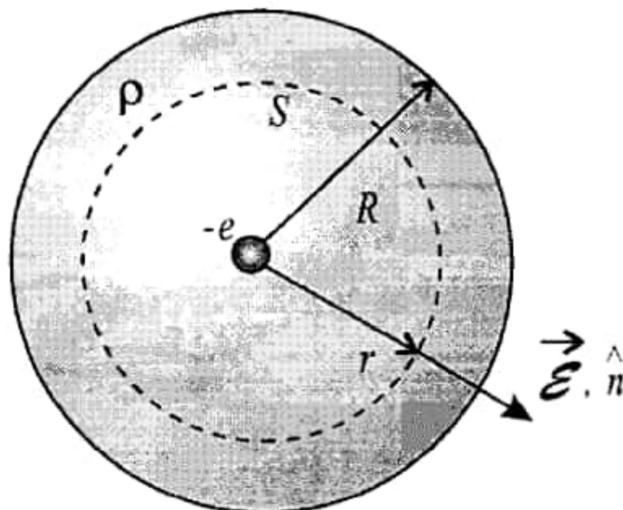


Figura 4.12: Superfície gaussiana para o modelo de Thomson.

A densidade volumétrica é dada por

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{e}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3e}{4\pi R^3}$$

e o campo gerado pela carga positiva fica

$$\vec{\mathcal{E}}_+ = \frac{r}{3\epsilon_0} \frac{3e}{4\pi R^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{\mathbf{r}}$$

O campo gerado pelo elétron no centro do átomo a uma distância r é

$$\vec{\mathcal{E}}_- = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

e o campo total fica

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= \vec{\mathcal{E}}_+ + \vec{\mathcal{E}}_- \\ &= \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{\mathbf{r}} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r^3}{R^3} - 1 \right) \hat{\mathbf{r}} \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

8) a) Dado que $u_m = \frac{\mu}{8\pi} \vec{H}^2$, onde $\vec{H}^2 = \vec{H} \cdot \vec{H}$, então:

Artigo sobre as leis de Maxwell

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{8\pi} \vec{H}^2 \right) = \frac{\mu}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H})$$
$$= \frac{\mu}{8\pi} \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = \frac{2\mu}{8\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H}$$

b) Como:

$$P_{\text{cel}}^E = -\frac{N}{2} \left(\oint_{\text{cel}} \vec{n} \times \vec{E} \, dS \right) \cdot \vec{H}$$

Notemos que dS faz papel de um diferencial, assim podemos usar o Teorema de Stokes na integral de forma a obtermos:

$$\oint_{\text{cel}} \vec{n} \times \vec{E} \, dS = \int_{\text{cel}} \nabla \times \vec{E} \, dV = \nabla \times \vec{E} \, V_{\text{cel}}$$

Dessa forma e ainda substituindo $N = \frac{1}{2\pi}$, temos

$$P_{\text{cel}}^E = -\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} \, V_{\text{cel}}$$

c) Tomando $P_{\text{cel}}^E = \frac{\partial u_m}{\partial t} V_{\text{cel}}$, temos:

$$-\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H})$$

Dado que $\vec{B} = \mu \vec{H}$, temos finalmente a Lei de Faraday à la Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

constante, logo podemos colocar dentro do derivada.

d) Pg 545 - Kleber
Vol II

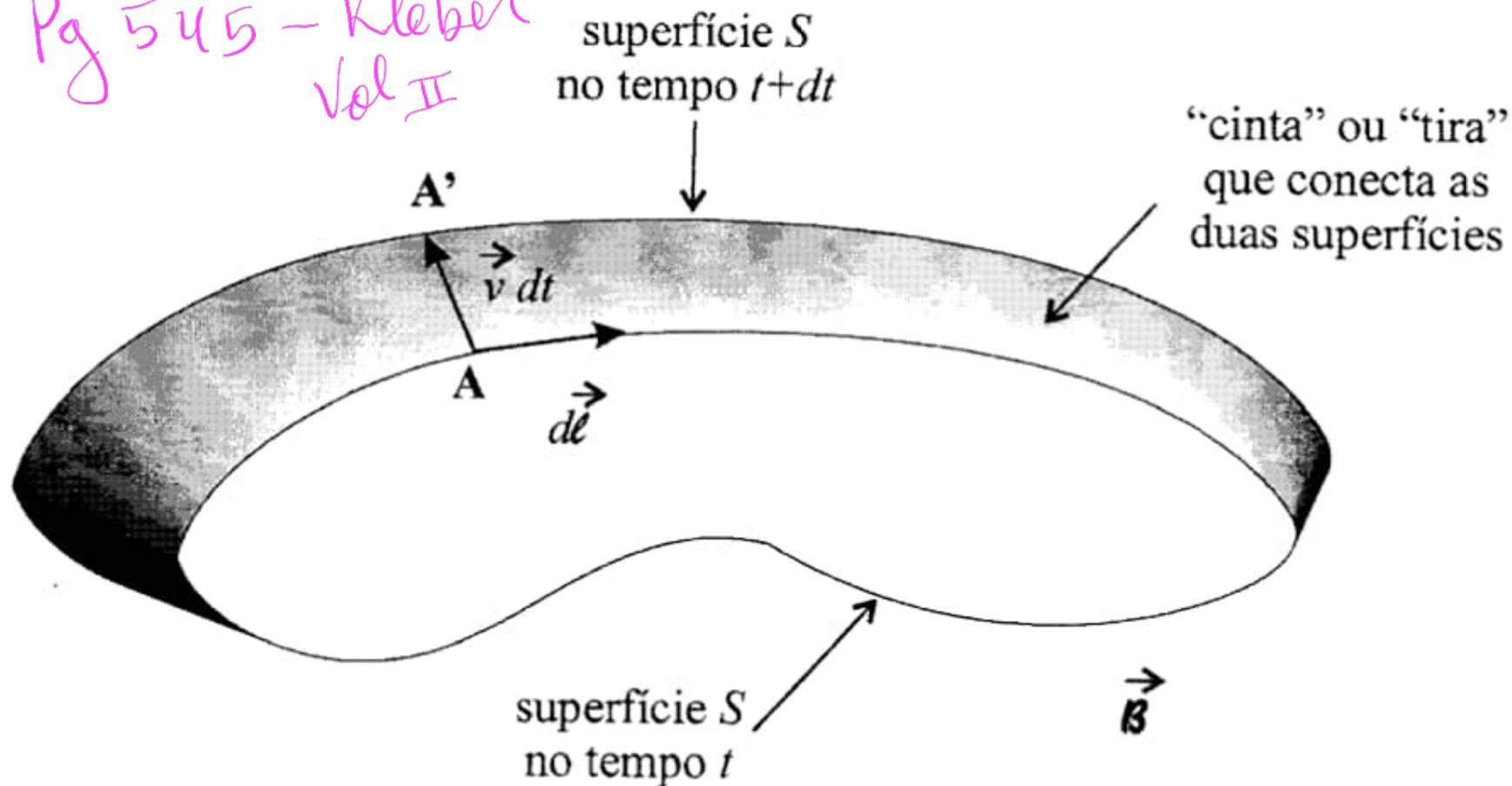


Figura 18.7: Circuito de formato arbitrário para demonstração da equação 18.5.

Na figura, vemos uma superfície S , de contorno C , que é atravessada por um campo magnético \vec{B} qualquer. A superfície se move e altera sua forma no tempo, descrevendo um volume no espaço. O fluxo magnético inicial que passa pela superfície S é

$$\Phi_{\vec{B}}(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

onde \hat{n} , o versor normal à superfície, é escolhido de modo a concordar com a regra da mão direita. Assim, percorrendo o contorno C da curva no sentido horário, \hat{n} apontará para dentro da página. Após um tempo dt , o novo fluxo será

$$\Phi_{\vec{B}}(t + dt) = \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A variação no fluxo será dada por

A diferença entre as integrais é dada pela integral de superfície da “tira” ou “cinta” que une as duas superfícies. Portanto,

$$d\Phi_{\vec{B}} = \int_{\text{tira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Na tira, de acordo com a interpretação geométrica do produto vetorial, um elemento de área pode se escrito como

$$\hat{n} dA = \vec{v} dt \times d\vec{\ell}$$

onde \vec{v} é a velocidade de translação da superfície S . Com essa expressão, obtemos

$$d\Phi_{\vec{B}} = \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{\ell})$$

ou

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{\ell})$$

onde a integral agora é sobre todo o contorno C da superfície S . As cargas no fio que define C têm, além da velocidade \vec{v} , uma velocidade de arrasto \vec{v}_a no fio, de modo que sua velocidade total é

$$\vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}_a$$

Como $\vec{v}_a \parallel d\vec{\ell}$, temos

$$\begin{aligned} \vec{v}_t \times d\vec{\ell} &= (\vec{v} + \vec{v}_a) \times d\vec{\ell} \\ \vec{v}_t \times d\vec{\ell} &= \vec{v} \times d\vec{\ell} \end{aligned}$$

de modo que podemos escrever

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \int_{\text{tira}} \vec{B} \cdot (\vec{v}_t \times d\vec{\ell})$$

Pela propriedade 1.17 dos produtos vetoriais, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Assim, identificando $\vec{a} = \vec{B}$, $\vec{b} = \vec{v}_t$ e $\vec{c} = d\vec{\ell}$, podemos escrever

$$\vec{B} \cdot (\vec{v}_t \times d\vec{\ell}) = \vec{v}_t \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = d\vec{\ell} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}_t)$$

de forma que achamos

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \oint_C d\vec{\ell} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}_t)$$

ou, invertendo a ordem do produto vetorial, o que troca o sinal do vetor,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = - \oint_C (\vec{v}_t \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

A força magnética por unidade de carga é dada por 18.1, e assim,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = - \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Lembrando agora a definição de *fem* dada pela expressão 12.1,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

obtemos

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -\mathcal{E}$$

que é válida para qualquer circuito de qualquer formato que é atravessado por um campo magnético qualquer. Note que por trás dessa relação está o fato de que é a força magnética produzida pelo campo magnético que age como fonte de *fem* no circuito, e a *fem* induzida é a responsável pela produção de corrente elétrica induzida. Assim, essa primeira experiência pode ser bem descrita por meio dos conceitos já estudados. Vejamos agora uma segunda experiência.

O fluxo magnético que passa através do circuito varia no tempo. Na primeira experiência ele pode ser associado com a *fem* \mathcal{E} induzida no circuito. Assim, pareceu lógico a Faraday e Henry explicar a segunda experiência supondo que a variação do fluxo magnético através do circuito é responsável pelo aparecimento de um campo elétrico induzido, o qual produz a força elétrica responsável pelo movimento das cargas e pelo estabelecimento da corrente elétrica induzida no circuito. Assim, lembrando que, pela definição da *fem* \mathcal{E} dada pela equação 12.1, temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

e que a força por unidade de carga responsável pelo movimento das cargas é o campo elétrico induzido, obtemos, utilizando a expressão 18.5,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

ou, utilizando a expressão explícita do fluxo magnético,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (18.6)$$

Essa equação é a *lei de Faraday* escrita na forma integral. Considerando um referencial no qual o circuito esteja fixo, podemos reescrever essa expressão como

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou, utilizando o teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

para transformar a integral de linha do lado esquerdo numa integral de superfície, temos

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \hat{n} dA$$

de modo que

$$\int_S (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \hat{n} dA = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou então,

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dA = 0$$

Considerando que o circuito é qualquer e que a integral acima é sempre nula, o integrando deve ser identicamente nulo, de modo que obtemos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (18.7)$$

que é a lei de Faraday escrita na forma diferencial. Ela é uma das equações de Maxwell do Eletromagnetismo, e amplia a validade da equação 5.18,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$$

* **Exemplo 18.2.** Um solenóide longo de raio R e n espiras por unidade de comprimento é percorrido por uma corrente i que varia no tempo com uma taxa $\frac{di}{dt}$. Responda ao que segue.

9
a) Determine a fem \mathcal{E} induzida num circuito circular de raio ρ concêntrico com o solenóide, conforme mostra a figura 18.11. A corrente propaga-se pelo solenóide, girando no sentido horário.

Kleber Vol II

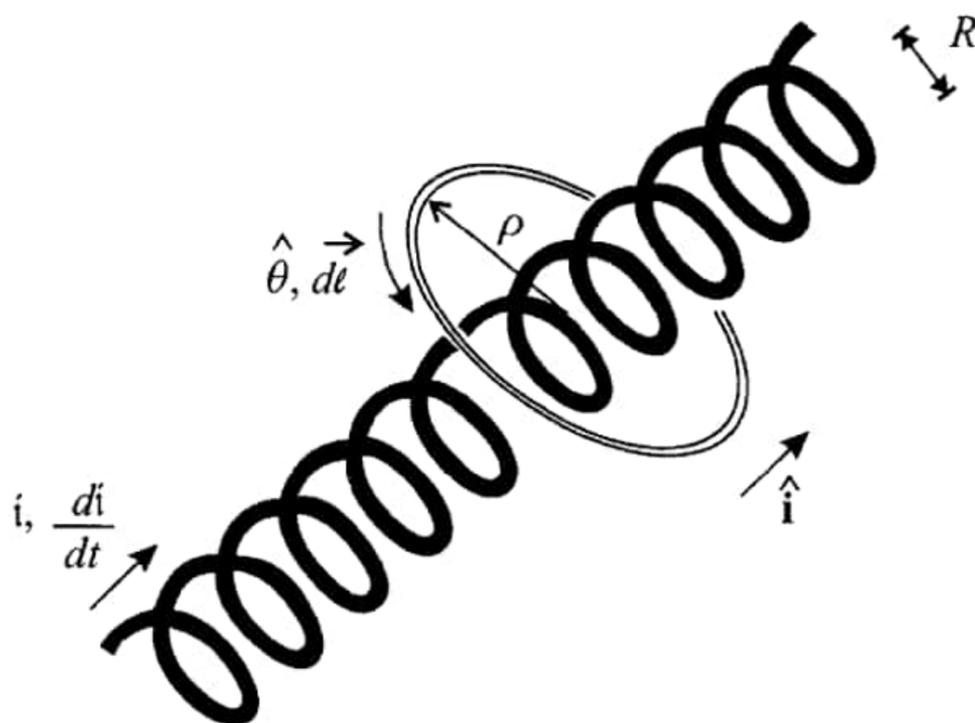


Figura 18.11: Força eletromotriz induzida por um solenóide.

De acordo com o exemplo 14.8, o campo magnético de um solenóide muito longo fica confinado no seu interior, e ele vale (equação 14.23)

$$\vec{B} = n\mu_0 i \hat{i}$$

onde \hat{i} está orientado paralelamente ao eixo do solenóide, de acordo com a figura 14.21. Portanto, o fluxo magnético que passa através da superfície S do circuito de raio ρ é diferente de zero apenas na região interna ao solenóide, e ele vale

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_{int}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

ou, utilizando a expressão para o campo magnético e lembrando que $\hat{n} = \hat{i}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{B}} &= \int_{S_{int}} n\mu_0 i \hat{i} \cdot \hat{i} dA \\ &= n\mu_0 i \int_{S_{int}} dA \\ \Phi_{\vec{B}} &= n\mu_0 i \pi R^2 \end{aligned}$$

Esse fluxo magnético varia no tempo porque a corrente não é constante, de modo que a fem induzida vale, pela equação 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -n\mu_0 \pi R^2 \frac{di}{dt} \quad (18.9)$$

Se a corrente aumenta com o tempo, de forma que $\frac{di}{dt} > 0$, a *fem* induzida é negativa. Como a normal à superfície foi escolhida como sendo paralela ao versor \hat{i} , o sentido positivo ao circular pelo circuito de raio R_c é o sentido horário, quando visto a partir da parte de baixo do solenóide. Assim, já que a *fem* \mathcal{E} é negativa, isso significa que ela circula pelo circuito no sentido anti-horário. Essa conclusão também pode ser comprovada se verificarmos que o campo magnético aumenta quando a corrente aumenta, de modo que o fluxo através da superfície definida pelo circuito também aumenta. O circuito gera uma corrente induzida, tentando se opor a essa variação, e para isso ele precisa de um fluxo magnético que passe da parte de cima do solenóide para a parte de baixo, no sentido do versor $-\hat{i}$. Para que o fluxo seja desse modo no interior do circuito, o campo magnético induzido deve ter o sentido de $-\hat{i}$, o que ocorre se a corrente for anti-horária. Para produzir uma corrente anti-horária, é preciso uma *fem* \mathcal{E} também anti-horária, a qual corresponde, por sua vez, a um valor negativo de \mathcal{E} , concordando com o resultado obtido anteriormente. Quando a corrente diminui com o tempo, temos $\frac{di}{dt} < 0$, e a *fem* \mathcal{E} , que é positiva, circula no sentido horário. Você deve confirmar isso através da análise física da situação, considerando os dois pontos de vista apresentados acima.

b)

b) Determine o campo elétrico induzido no circuito.

Para determinar o campo elétrico induzido, devemos lembrar que ele não é gerado por cargas livres, ao contrário do que ocorre com o campo

No presente caso, a força por unidade de carga é o campo elétrico induzido, de modo que

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

A fem \mathcal{E} é dada pela expressão 18.9,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt}$$

O versor $d\vec{\ell}$ pode ser escrito em termos do versor $\hat{\theta}$, o qual circula pelo circuito no sentido horário, de modo que, de acordo com as convenções adotadas, temos $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$. Pela discussão feita no item (a), o campo elétrico induzido

pode ser expresso por $\vec{\mathcal{E}} = \mp \mathcal{E} \hat{\theta}$, dependendo do fato de $\frac{di}{dt}$ ser positivo ou negativo. Reunindo todos esses valores, achamos

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \oint_C \mp \mathcal{E} \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta}$$

ou

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \mp \mathcal{E} \rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

ou ainda,

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \mp \mathcal{E} \rho 2\pi$$

de modo que

$$\mathcal{E} = \pm \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \quad (18.10)$$

ou, vetoriamente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \mp \mathcal{E} \hat{\theta} = \mp \left(\pm \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \right) \hat{\theta}$$

ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

Assim, o campo elétrico induzido exibe uma simetria cilíndrica em torno do solenóide e, se a corrente no solenóide aumenta no decorrer do tempo, ele circula no sentido anti-horário e induz uma corrente nesse sentido. Por outro lado, se a corrente no solenóide diminui com o passar do tempo, o campo elétrico induzido circula no sentido horário, de modo que a corrente induzida também tem esse sentido. É interessante notar que o solenóide vai induzir um campo elétrico em toda a região externa a ele, independente de existir um circuito elétrico material formado por condutores ou não, desde que o fluxo magnético através dele seja variável. Se houver cargas livres ao seu redor que possam se movimentar, como ocorre se existirem condutores em torno do solenóide, por exemplo, então aparecerá uma corrente elétrica induzida, pois só nesse caso teremos cargas que podem se mover para formar uma corrente

elétrica. A *fem* \mathcal{E} e o campo induzido $\vec{\mathcal{E}}$ independem da existência ou não de cargas elétricas e de meios materiais.

10

Kleber
Vol II

Exemplo 14.9. Um toróide é a forma geométrica obtida quando as extremidades de um cilindro são entortadas até que elas se toquem, formando a figura 14.22. Considerando um solenóide de tamanho L , se o torcermos até que seus extremos coincidam, formaremos um toróide magnético. Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético gerado pelo toróide.

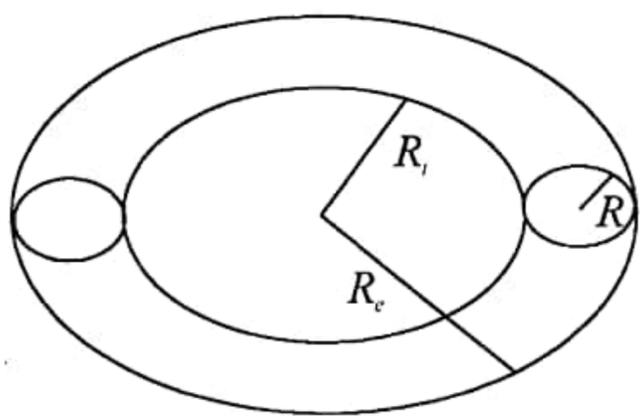


Figura 14.22: Um toróide de raio interno R_i e raio externo R_e . O raio do cilindro que deu origem ao toróide é R .

Antes de mais nada, é preciso dizer que, ao entortarmos o solenóide finito para formar o toróide, idealmente as linhas de campo magnético que antes saíam por uma extremidade, passavam por fora do solenóide e depois entravam pela outra extremidade agora vão ficar sempre dentro do toróide, já que os seus extremos coincidem. Assim, um toróide ideal limita o campo magnético ao seu interior, e fora dele não há campo magnético. O campo no interior do toróide deve ser circular, pela simetria cilíndrica envolvida na situação. A figura 14.23 apresenta a curva amperiana para esse problema.

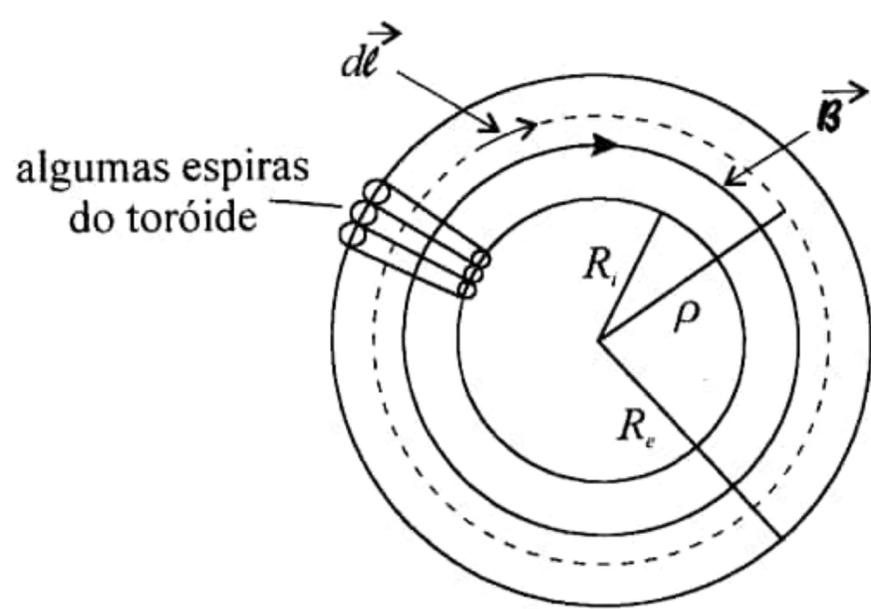


Figura 14.23: Curva amperiana para o cálculo do campo magnético num toróide.

$\rho < R_i$, a área definida pela curva não é atravessada por nenhuma corrente, o que faz com que a lei de Ampère 14.18 fique

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Se houvesse um campo magnético nessa região, ele teria uma simetria cilíndrica e as linhas de campo seriam trajetórias circulares, como acontece na região em que $R_i \leq \rho \leq R_e$. Esse fato faria com que o fator $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ tivesse valores não-nulos em geral, de modo que a integral como um todo seria diferente de zero. Para que ela seja igual a zero, é preciso que o campo magnético \vec{B} seja nulo para $\rho < R_i$. Portanto,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho < R_i$$

Quando $\rho > R_e$, a superfície circular definida pela curva ampereana corta as espiras ao meio, de forma que a corrente que passa pelas espiras entra e sai do plano da página um mesmo número de vezes. Portanto, a corrente total líquida que é envolvida pela curva ampereana é nula, o que faz com que o campo magnético na região $\rho > R_e$ seja nulo, conforme a explicação dada para a região $\rho < R_i$. Temos, então,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho > R_e$$

Assim, fora do toróide, o campo magnético é nulo. Resta, desse modo, a região $R_i \leq \rho \leq R_e$. Neste caso, a curva ampereana envolve as correntes que passam pela parte das espiras que ficam dispostas sobre o raio menor do toróide quando elas entram no plano da página, mas ela não engloba a parte externa das espiras, que ficam sobre o raio maior. Assim, a corrente total agora é não-nula, e ela vale, lembrando que existem N espiras no toróide, $I = Ni$, sendo i a corrente que percorre uma espira. Como \vec{B} e $d\vec{\ell}$ são paralelos, temos, pela lei de Ampère,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I \\ \oint_C B \, dl &= \mu_0 Ni \\ B \oint_C dl &= \mu_0 Ni \\ B 2\pi\rho &= \mu_0 Ni \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho}$$

ou, na forma vetorial, colocando um versor $\hat{\theta}$ tangente à curva ampereana,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad R_i \leq \rho \leq R_e \quad (14.24)$$

que é o campo magnético gerado por um toróide. Note que ele não é homogêneo e diminui com o aumento da distância do ponto considerado ao centro do toróide. Além disso, apesar de termos deduzido essa expressão para um toróide de seção reta circular, ela vale para qualquer toróide, desde que a sua seção reta permaneça sempre a mesma. Outra verificação importante é que o campo magnético gerado por um fio infinito percorrido por uma corrente Ni é, pela expressão 14.4,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

e ele é idêntico ao campo do toróide, ou seja, o efeito magnético produzido por um toróide com N espiras equivale ao de um fio infinito conduzindo uma corrente Ni . Para que os campos sejam equivalentes, o fio deve estar num plano perpendicular ao do toróide e deve passar pelo centro dele. Observe nos dois casos, a existência de uma simetria cilíndrica no campo magnético que é proporcional a $\frac{1}{\rho}$, como acontece no caso elétrico.

* **Exemplo 19.1.** Considere um capacitor plano paralelo formado por placas circulares de raio R separadas por uma distância L , como mostra a figura 19.3. A placa direita do capacitor é a placa positiva, e ele está sendo carregado por cargas transportadas por uma corrente i . Considere que durante o carregamento a carga se distribua uniformemente sobre a superfície das placas do capacitor.

Kleber
Vol II

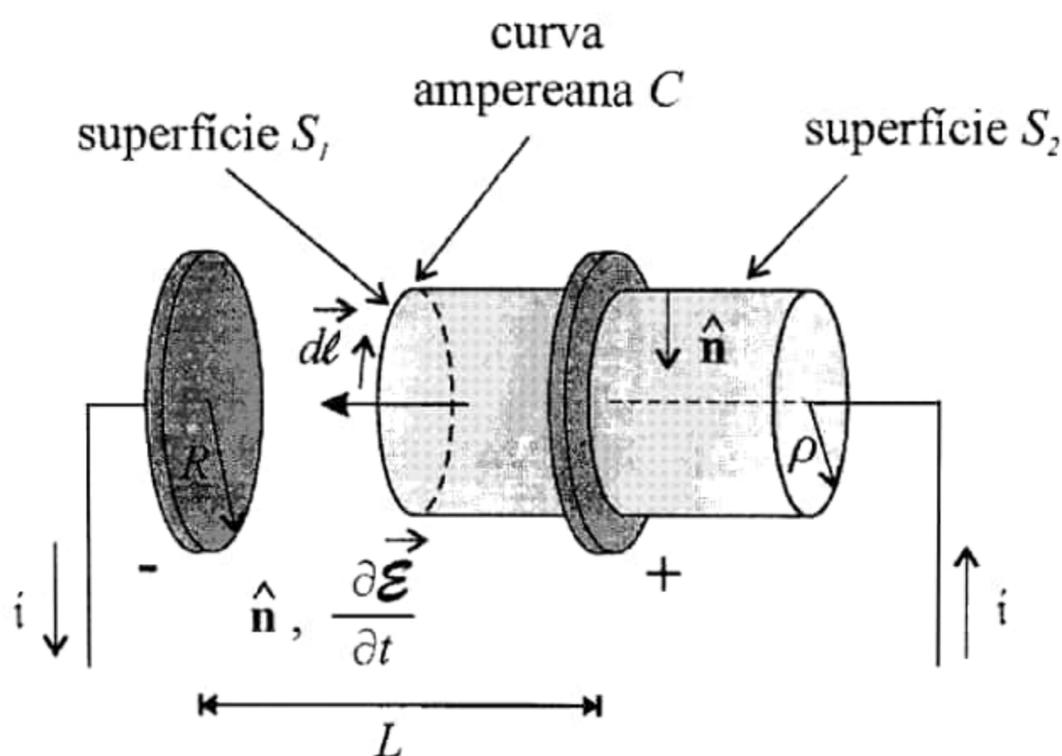


Figura 19.3: Um capacitor de placas planas paralelas circulares.

a) a) Considerando a superfície circular plana S_1 de contorno C e raio ρ , ache a corrente de deslocamento através dessa superfície e o campo magnético \vec{B} na curva amperiana.

Para determinar a corrente de deslocamento através da superfície, precisamos do campo elétrico dentro do capacitor, que pode ser obtido mediante a equação 4.24,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

de modo que

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \hat{n} \quad (19.13)$$

Assim, a corrente de deslocamento 19.4 fica

$$i_D = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$i_D = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \hat{n} \cdot \hat{n} dA$$

ou ainda,

$$i_{\mathcal{D}} = \frac{d\sigma}{dt} \int_{S_1} dA$$

de modo que

$$i_{\mathcal{D}} = \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Podemos agora utilizar a lei de Ampère-Maxwell 19.5,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que não há nenhuma corrente real atravessando a superfície S_1 , de modo que $\vec{J} = 0$ e a primeira integral é nula. Obtemos, portanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\mathcal{D}}$$

ou, como $\vec{B} = B \hat{\theta}$ e $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$, temos

$$\int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

ou ainda,

$$B \rho \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

de modo que achamos

$$B = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt} \hat{\theta}$$

b) Refaça os cálculos anteriores, só que agora utilize a superfície cilíndrica S_2 , que se estende para fora do capacitor e que é limitada pela curva amperiana C .

A superfície S_2 é formada por duas superfícies: a parte plana circular e a parte lateral do cilindro que atravessa o capacitor. Na parte plana não há campo elétrico variável, de modo que por ela não passa nenhuma corrente de deslocamento, assim como ocorre também com a parte lateral fora do capacitor. Na parte lateral dentro do capacitor existe um campo elétrico variável, só que ele é tangente à superfície, de modo que o produto escalar $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n}$, onde \hat{n} é o vetor normal à superfície, é sempre nulo. Portanto, por S_2 não passa nenhuma corrente de deslocamento. Por outro lado, ela é atravessada por correntes reais. Na parte circular plana existe uma corrente i que passa por ela, e na parte lateral a carga do capacitor passa por S_2 à medida que o capacitor se carrega. Portanto, temos duas contribuições para a corrente total.

A corrente que passa pela superfície circular plana vale i , e a carga que passa pela superfície lateral pode ser determinada mediante a consideração de que ela se distribui uniformemente sobre a placa do capacitor, de modo que a densidade de carga varia no tempo, mas não no espaço. Assim, como

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{A}$$

podemos escrever, para a carga que passou pela superfície S_2 e que se encontra na placa do capacitor a uma distância maior que ρ ,

$$Q_f = \sigma(\pi R^2 - \pi \rho^2)$$

Essa carga gera a corrente

$$i_f = \frac{dQ_f}{dt} = (\pi R^2 - \pi \rho^2) \frac{d\sigma}{dt}$$

A corrente total que passa por S_2 é, então,

$$i_T = i - i_f$$

onde o sinal negativo aparece porque as correntes i e i_f atravessam a superfície S_2 em sentidos opostos, já que a densidade de corrente \vec{J} está na mesma direção e sentido que a normal apresentada na figura e \vec{J}_f está no sentido oposto ao definido pela normal à superfície cilíndrica lateral. Portanto,

$$i_T = i - (\pi R^2 - \pi \rho^2) \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$i_T = i - \pi R^2 \frac{d\sigma}{dt} + \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Como a carga que chega à placa do capacitor é dada por

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

temos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

ou

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{i}{\pi R^2} \quad (19.14)$$

de forma que

$$i_T = i - \pi R^2 \frac{i}{\pi R^2} + \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$i_T = \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Utilizando agora a lei de Ampère-Maxwell 19.6,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(i + i_D)$$

temos, lembrando que $\vec{B} = B \hat{\theta}$ e $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$\rho B 2\pi = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

de modo que

$$B = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt}$$

que é o mesmo resultado obtido com a superfície S_1 , como deve ser, já que a curva amperiana C é a mesma. Em termos vetoriais, achamos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt} \hat{\theta}$$

Podemos reescrever esta expressão em termos da corrente elétrica que chega na placa do capacitor se utilizarmos a expressão 19.14, o que resulta em

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{i}{\pi R^2} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \hat{\theta} \quad (19.15)$$

12 Pg-205
Kleber
Vol II

Do ponto de vista matemático, podemos obter a equação 14.16 se considerarmos a lei de Biot-Savart 14.14, tomando o seu divergente, o que resulta em

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV\end{aligned}$$

Agora, precisamos da relação vetorial 1.58g

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

que fica, para o nosso caso,

$$\nabla \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = [\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left[\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Como $\vec{J}(\vec{r}')$ não é função de \vec{r} , e considerando que o operador ∇ só age nas coordenadas \vec{r} , o primeiro termo do lado direito é nulo. O segundo termo pode ser reescrito se lembrarmos a expressão 5.9,

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Assim, temos

$$\nabla \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left\{ \nabla \times \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\}$$

Entretanto, da relação 1.58b obtemos, para qualquer função escalar Φ ,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

ou seja, o rotacional de um gradiente é sempre nulo, de modo que o lado direito da expressão acima se anula, e assim,

$$\nabla \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 0$$

Com esse resultado, achamos

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 0 dV$$

isto é,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

2. Deriving Gauss's Law for Magnetism from the Law of

Universal Magnetism → *Comparações com o artigo.*

Artigo
Grey
Peel
Gauss's law for magnetism cannot be derived from Law of Universal Magnetism alone since the Law of Universal Magnetism gives the magnetic field due to an individual magnetic charge only. However, Gauss's law for magnetism can be proven from Law of Universal Magnetism if it is assumed, in addition, that the magnetic field obeys the superposition principle. The superposition principle says that the resulting field is the vector sum of fields generated by each particle or the integral if the magnetic charges are distributed smoothly in space.

Law of Universal Magnetism

→ *Não existe essa lei e*

$$F = \frac{k_e H_1 H_2}{r^2 \epsilon}$$

outro "cria" em
outro artigo

Substituting the speed of light squared for specific orbital energy (ϵ) we obtain

Substituição
milagrosa.

$$F = \frac{k_e H_1 H_2}{r^2 c^2}$$

where,

F = force (Newtons)

H_1 and H_2 = magnitudes of magnetic poles (ampere-meter)

μ = permeability of the intervening medium (tesla meter/ampere, henry/meter or newton/ampere²)

r = separation (meter)

c^2 = speed of light (m²/s²)

$k_e = c^2 \mu / 4\pi$

Substituting in $\frac{\mu_0}{4\pi}$ for Coulombs Constant $\frac{k_e}{c^2}$, we obtain the classic force of attraction equation between two magnetic poles when both poles are small enough to be represented as point magnetic charges,

$$F = \frac{\mu H_1 H_2}{4\pi r^2}$$

com a
substituição
milagrosa aparece
algo real

Law of Universal Magnetism states that the magnetic field due to a stationary

magnetic charge is:

$$B(r) = \frac{\mu q_m e_r}{4\pi r^2}$$

→ faz aparecer um carga magnética do nada.

where,

e_r is the radial unit vector,

q_m is the magnetic charge of a test particle (SI unit: ampere-meter),

μ is the permeability of the intervening medium (SI unit: tesla meter per ampere, henry per meter or newton per ampere squared),

r is the separation (SI unit: meter).

Using the Law of Universal Magnetism, we get the total field at r by using an integral to sum the field at r due to the infinitesimal change at each other point s in space to give:

$$B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\rho_m(s)(r-s)}{|r-s|^3} d^3s$$

→ Surge uma densidade de carga magnética

where ρ_m is the magnetic charge density. If we take the divergence of both sides of this equation with respect to r and use the known theorem [7]

$$\nabla \cdot \left(\frac{r}{|r|^3} \right) = 4\pi\delta(r)$$

where $\delta(r)$ is the Dirac delta function, the result is

$$\nabla \cdot B(r) = \int \rho(s)\delta(r-s)d^3s$$

Using the sifting property of the Dirac delta function, we arrive at

$$\nabla \cdot B(r) = \mu\rho_m$$

where $\mu = \mu_0$ the vacuum permeability,

$$\nabla \cdot B(r) = \mu_0\rho_m$$

→ Assim ele "mostra" a existência de monopolo magnético.

which is the differential form of Gauss's law for magnetism.