



PME 3543

Estruturas Mecânicas e de Veículos

Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

04

**Análise Matricial de
Estruturas**



Sistemas contínuos vs. sistemas discretos

- No mundo real → sistemas (estruturas) contínuos → soluções matemáticas analíticas são disponíveis apenas para situações (geometrias) simples, tais como vigas, placas retangulares ou circulares, etc...
- É prática comum da engenharia, modelar os sistemas do mundo real por meio de subsistemas idealizados mais simples para os quais temos solução conhecida, e assim, por meio destes, estudar o comportamento do sistema original.
É este o processo por exemplo quando idealizamos uma estrutura como sendo uma treliça ou quando aproximamos uma estrutura de carroceria como sendo formada por vigas.
- Para obter-se resultados melhores na análise de situações mais complexas, quando a geometria é tal que não seja adequado aproximá-la para geometrias simples, faz-se uma abordagem por um método de discretização numérica.
- A discretização do sistema consiste em subdividir o mesmo em uma quantidade finita de componentes (ou elementos).
- Os métodos de discretização irão representar a solução contínua com uma aproximação tão boa quanto se deseje, conforme aumente-se a quantidade de elementos utilizados na discretização, isto é, conforme refine-se a discretização.



- Existem vários métodos de discretização. Dentre eles:
Método das diferenças finitas: técnica de discretização aplicada diretamente às equações diferenciais que governam o problema
Método dos elementos de contorno
Método dos elementos finitos (Turner, anos 50, Boeing → Clough, final dos anos 50 e anos 60, Berkeley → Zienkiewicz, anos 60 Univ. Wales).
- No campo da análise de estruturas o método dos elementos finitos (MEF) tem predomínio praticamente absoluto.
- Hoje em dia o método dos elementos finitos é utilizado na solução de problemas em diversas disciplinas além da aplicação na análise de estruturas, tais como em problemas de transmissão de calor, magnetismo, etc... mas os seus desenvolvedores originais eram engenheiros de estruturas.
- Com a difusão do método, este posteriormente recebeu a contribuição de matemáticos para demonstrações mais rigorosas de seus fundamentos.
- A apresentação que iremos fazer segue a formulação original, prática mas não rigorosa sob o ponto de vista matemático, utilizada pelos desenvolvedores originais. É a chamada abordagem pelos deslocamentos.
- Os métodos de discretização tiraram proveito do advento dos computadores digitais. Na hipótese de não ter havido o desenvolvimento deles o método dos elementos finitos em particular não valeria na prática de nada e muito provavelmente nem teria sido desenvolvido. Assim pode-se dizer que houve sinergia entre o desenvolvimento dos computadores digitais e o desenvolvimento do método dos elementos finitos.



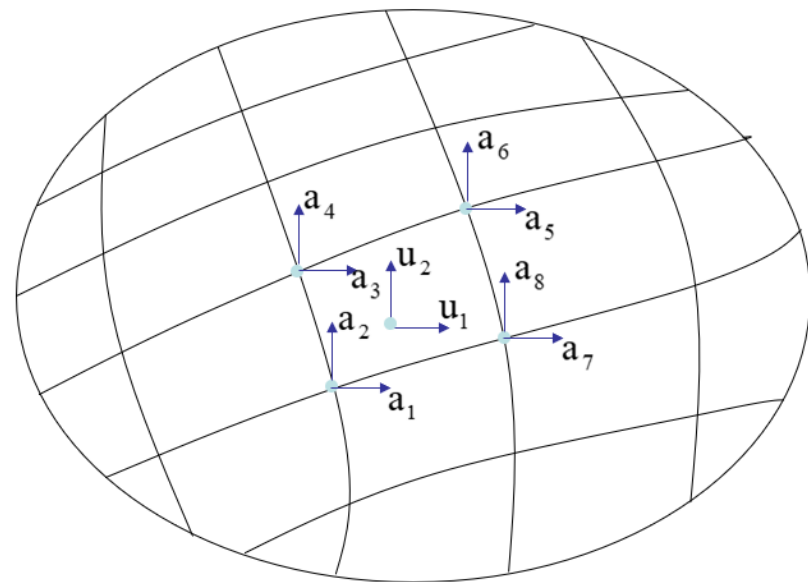
Análise Matricial de Estruturas

- Para iniciar o entendimento do MEF vamos começar apresentando a técnica de análise matricial de estruturas, que é anterior historicamente àquele.

- No processo de discretização, dividimos o meio em uma quantidade finita de elementos, conectados entre si por um número limitado de nós.

- **Duas condições fundamentais são estabelecidas, quais sejam:**

1. Compatibilidade de deslocamentos: os deslocamentos nodais de todos os elementos em um nó comum devem obviamente ser todos iguais entre si.
2. Equilíbrio de forças nos nós: a soma das forças internas em cada nó advindas de cada elemento que possua este nó, deve igualar as forças externas aplicadas naquele nó.





A equação de movimento discretizada em notação matricial:

$$m\ddot{u} = F$$

$$[M]\{\ddot{u}\} = \{F\} = \{F_{ext}\} + \{F_{int}\}$$

$$\{F_{int}\} = -[C]\{\dot{u}\} - [K]\{u\}$$

$$[M]\{\ddot{u}\} = \{F_{ext}\} - [C]\{\dot{u}\} - [K]\{u\}$$

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$[M]$ Matriz de massa

$[C]$ Matriz de amortecimento

$[K]$ Matriz de rigidez



$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

Para o caso estático:

$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

No caso estático linear a matriz de rigidez é constante, isto é, ela não varia nem com o tempo, nem com carregamento, nem com o aumento dos deslocamentos ou deformações, não há abertura ou fechamento de contatos, etc...

No caso estático linear então o problema resume-se a montar a matriz de rigidez e invertê-la:

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F_{ext}\}$$



- Entretanto podemos ter situações de não-linearidade. As não linearidades podem ser de natureza geométrica (grandes deslocamentos ou contatos) ou de material (grandes deformações ultrapassando o regime elástico). Os casos não lineares serão abordadas posteriormente.

- O caso dinâmico também será tratado posteriormente. Uma análise dinâmica também pode ser linear ou não linear. Do mesmo modo as não linearidades podem ser de natureza geométrica (grandes deslocamentos ou contatos) ou de material (grandes deformações ultrapassando o regime elástico). No caso dinâmico, conforme seja linear ou não e conforme o esquema de integração numérica no tempo adotado, pode ser necessário inverter matrizes em cada intervalo de tempo de integração. Pensando no esforço computacional requerido:
 - A inversão da matriz de massa é trivial se a mesma for adotada como diagonal.
 - Todavia a matriz de rigidez nunca é diagonal.
 - A matriz de amortecimento também pode ser invertida de forma trivial se também ela for adotada como diagonal.



Análise Matricial de Estruturas – Caso estático

Exemplo 01: Duas Barras de Treliça

$$E = 210.000[MPa]$$

$$A_1 = 400[mm^2]$$

$$A_2 = 500[mm^2]$$

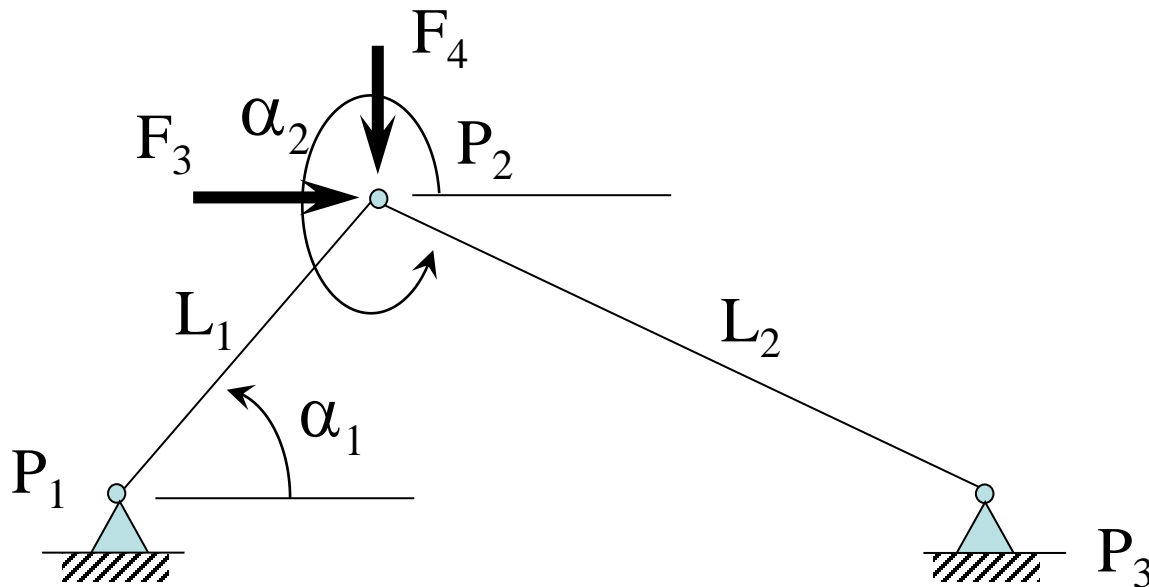
$$P_1(x_1; y_1) = P_1(0; 0)[mm]$$

$$P_2(x_2; y_2) = P_2(1000; 500)[mm]$$

$$P_3(x_3; y_3) = P_3(3000; 0)[mm]$$

$$F_3 = 1000[N]$$

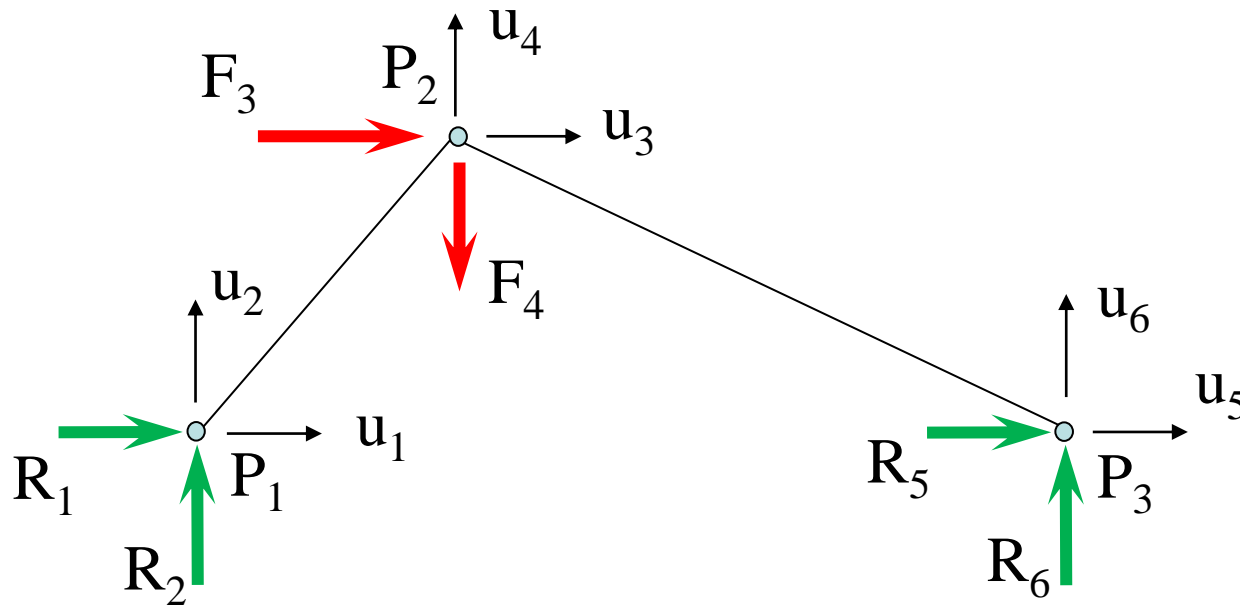
$$F_4 = -500[N]$$





$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F_{ext}\}$$



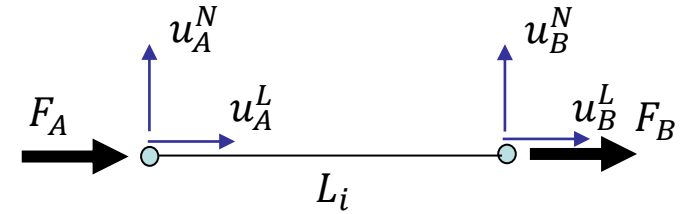


A matriz de rigidez do elemento tipo barra de treliça:

elemento genérico “i”

nós genéricos “A” e “B”

$$F_A = -F_B = F_{AB}$$



$$|\sigma| = \frac{|F_{AB}|}{A} = E|\varepsilon| = E \left| \frac{\Delta L}{L} \right| \Rightarrow F_{AB} = -EA \frac{\Delta L}{L} = -EA \frac{(u_B^L - u_A^L)}{L}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{EA}{L} (u_A^L - u_B^L)$$

$$F_A^L = \frac{EA}{L} (u_A^L - u_B^L) = F_{AB}$$

$$F_A^N = 0$$

$$F_B^L = -\frac{EA}{L} (u_A^L - u_B^L) = -F_{AB}$$

$$F_B^N = 0$$

Na forma matricial:

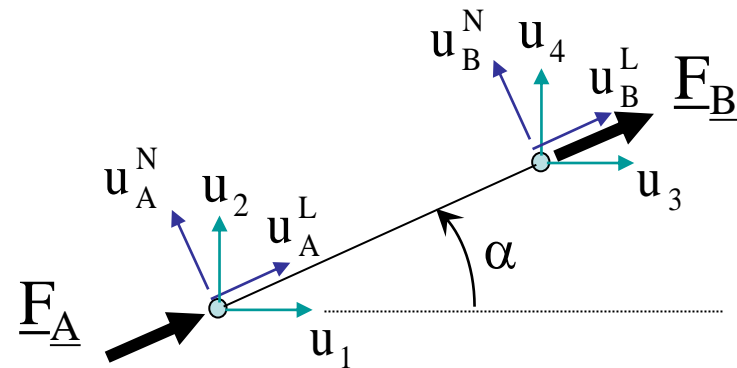
$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_i}{L_i} & 0 & -\frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_i}{L_i} & 0 & \frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A^L \\ u_A^N \\ u_B^L \\ u_B^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{AB} \\ 0 \\ -F_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k]_{local}^{eli} = \begin{bmatrix} \frac{EA_i}{L_i} & 0 & -\frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_i}{L_i} & 0 & \frac{EA_i}{L_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A matriz de transformação de coordenadas do elemento "i"



$$\begin{aligned}F_A &= F_1 \cos \alpha + F_2 \operatorname{sen} \alpha \\0 &= -F_1 \operatorname{sen} \alpha + F_2 \cos \alpha \\F_B &= F_3 \cos \alpha + F_4 \operatorname{sen} \alpha \\0 &= -F_3 \operatorname{sen} \alpha + F_4 \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_A^L &= u_1 \cos \alpha + u_2 \operatorname{sen} \alpha \\u_A^N &= -u_1 \operatorname{sen} \alpha + u_2 \cos \alpha \\u_B^L &= u_3 \cos \alpha + u_4 \operatorname{sen} \alpha \\u_B^N &= -u_3 \operatorname{sen} \alpha + u_4 \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\{F_{local}^{el.i}\} = [T^{el.i}]\{F_{global}^{el.i}\}$$

$$\{u_{local}^{el.i}\} = [T^{el.i}]\{u_{global}^{el.i}\}$$

$$[T^{el.i}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



A matriz de rigidez global do elemento “i”

$$\{u_{local}^{el.i}\} = [T^{el.i}]\{u_{global}^{el.i}\} \qquad \{F_{local}^{el.i}\} = [T^{el.i}]\{F_{global}^{el.i}\}$$

$$[k]_{local}^{el.i}\{u_{local}^{el.i}\} = \{F_{local}^{el.i}\}$$

$$[k]_{local}^{el.i}[T^{el.i}]\{u_{global}^{el.i}\} = [T^{el.i}]\{F_{global}^{el.i}\}$$

$$[T^{el.i}]^{-1}[k]_{local}^{el.i}[T^{el.i}]\{u_{global}^{el.i}\} = [T^{el.i}]^{-1}[T^{el.i}]\{F_{global}^{el.i}\}$$

$$[T^{el.i}]^T [k]_{local}^{el.i} [T^{el.i}]\{u_{global}^{el.i}\} = \{F_{global}^{el.i}\}$$

$$[k]_{global}^{el.i}\{u_{global}^{el.i}\} = \{F_{global}^{el.i}\}$$

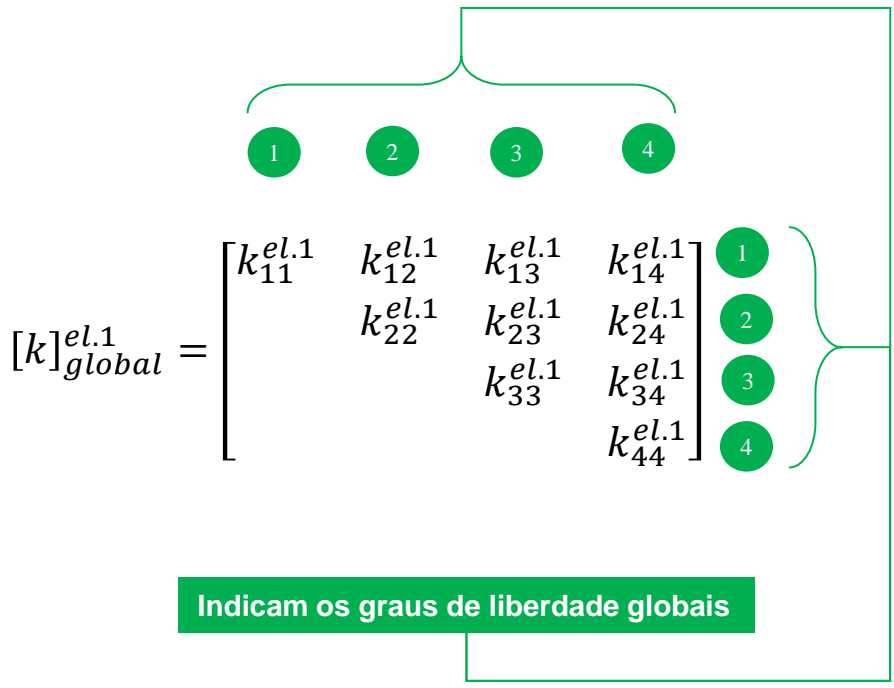
onde:

$$[k]_{global}^{el.i} = [T^{el.i}]^T [k]_{local}^{el.i} [T^{el.i}]$$

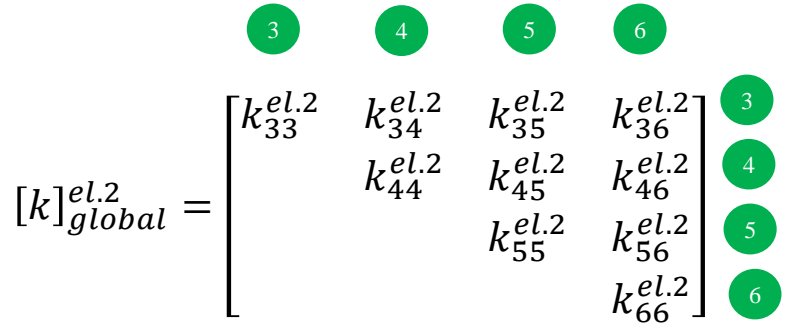


A matriz de rigidez global dos elementos "i"

A matriz de rigidez no sistema global do elemento "1"



A matriz de rigidez no sistema global do elemento "2"

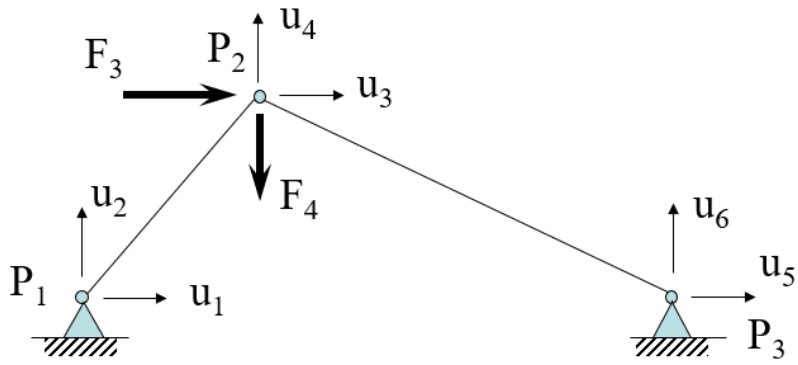




A matriz de rigidez global completa da estrutura

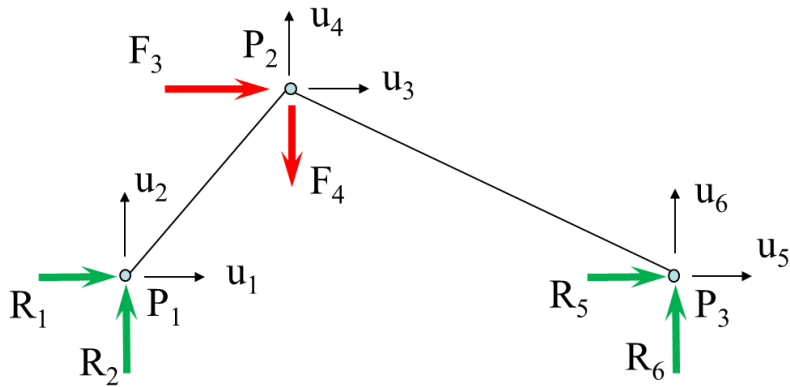
$$[K] = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \textcircled{1} & k_{11}^{el.1} & k_{21}^{el.1} & k_{31}^{el.1} & k_{41}^{el.1} & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & k_{21}^{el.1} & k_{22}^{el.1} & k_{23}^{el.1} & k_{24}^{el.1} & 0 & 0 \\ \textcircled{3} & k_{31}^{el.1} & k_{23}^{el.1} & k_{33}^{el.1} + k_{33}^{el.2} & k_{43}^{el.1} + k_{43}^{el.2} & k_{53}^{el.2} & k_{63}^{el.2} \\ \textcircled{4} & k_{41}^{el.1} & k_{24}^{el.1} & k_{43}^{el.1} + k_{43}^{el.2} & k_{44}^{el.1} + k_{44}^{el.2} & k_{54}^{el.2} & k_{64}^{el.2} \\ \textcircled{5} & 0 & 0 & k_{53}^{el.2} & k_{54}^{el.2} & k_{55}^{el.2} & k_{56}^{el.2} \\ \textcircled{6} & 0 & 0 & k_{63}^{el.2} & k_{64}^{el.2} & k_{56}^{el.2} & k_{66}^{el.2} \end{matrix}$$

Entretanto a matriz de rigidez global é singular e não pode ser invertida!
(discutir significado físico)



$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$



Condições de Contorno:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$



Redução da matriz de rigidez – Rearranjando linhas e colunas

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Trocando colunas de posição:
3 por 5
4 por 6

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{35} & k_{36} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{45} & k_{46} & k_{34} & k_{44} \\ 0 & 0 & k_{55} & k_{56} & k_{35} & k_{45} \\ 0 & 0 & k_{56} & k_{66} & k_{36} & k_{46} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Trocando linhas de posição:
3 por 5
4 por 6

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{55} & k_{56} & k_{35} & k_{45} \\ 0 & 0 & k_{56} & k_{66} & k_{36} & k_{46} \\ k_{13} & k_{23} & k_{35} & k_{36} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{45} & k_{46} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_6 \\ F_3 \\ -F_4 \end{Bmatrix}$$



Redução da matriz de rigidez

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{el.1} & k_{21}^{el.1} & k_{31}^{el.1} & k_{41}^{el.1} & 0 & 0 \\ k_{21}^{el.1} & k_{22}^{el.1} & k_{23}^{el.1} & k_{24}^{el.1} & 0 & 0 \\ k_{31}^{el.1} & k_{23}^{el.1} & k_{33}^{el.1} + k_{33}^{el.2} & k_{43}^{el.1} + k_{43}^{el.2} & k_{53}^{el.2} & k_{63}^{el.2} \\ k_{41}^{el.1} & k_{24}^{el.1} & k_{43}^{el.1} + k_{43}^{el.2} & k_{44}^{el.1} + k_{44}^{el.2} & k_{54}^{el.2} & k_{64}^{el.2} \\ 0 & 0 & k_{53}^{el.2} & k_{54}^{el.2} & k_{55}^{el.2} & k_{56}^{el.2} \\ 0 & 0 & k_{63}^{el.2} & k_{64}^{el.2} & k_{56}^{el.2} & k_{66}^{el.2} \end{bmatrix}$$

The matrix is annotated with nodes 1 through 6 above the columns and 1 through 6 to the right of the rows. A dashed green box highlights the submatrix for nodes 3 and 4, showing the addition of stiffnesses from two elements. Red lines connect the nodes to their corresponding rows and columns in the matrix.

1

2

3

4

5

6



A solução do problema

- A matriz de rigidez reduzida;
- obtendo os deslocamentos desconhecidos:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33}^{el.1} + k_{33}^{el.2} & k_{34}^{el.1} + k_{34}^{el.2} \\ k_{34}^{el.1} + k_{34}^{el.2} & k_{44}^{el.1} + k_{44}^{el.2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_3 \\ -F_4 \end{Bmatrix}$$

Inversa da Matriz de Rigidez
reduzida da estrutura



- obtendo as forças de reação:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_3 \\ -F_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- obtendo as forças em cada barra:

$$\{F_{local}^{el.i}\} = [k]_{local}^{el.i} \{u_{local}^{el.i}\}$$

$$\{F_{local}^{el.i}\} = [k]_{local}^{el.i} [T^{el.i}] \{u_{global}^{el.i}\}$$

- obtendo a tensão em cada barra:

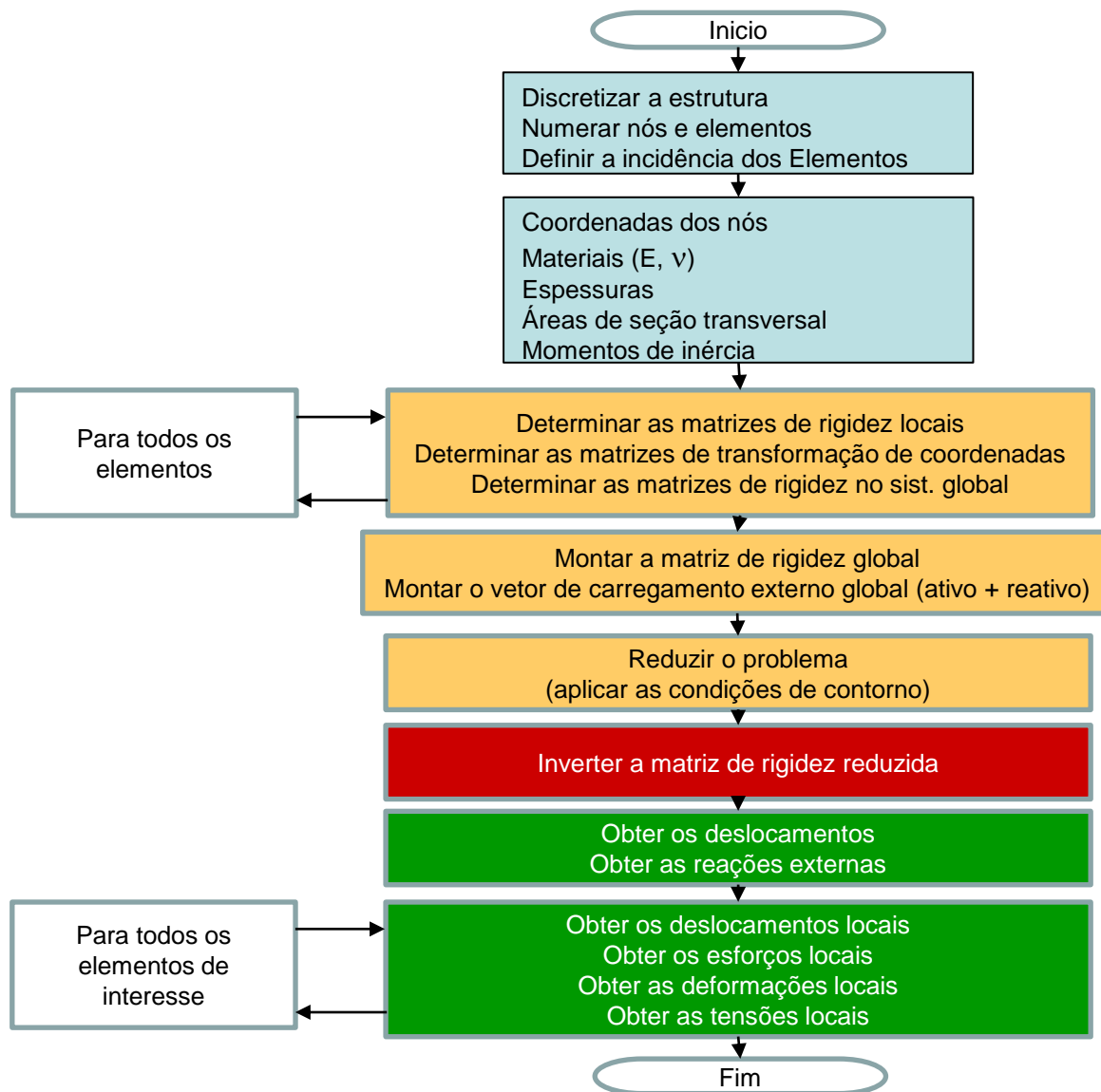
$$\sigma = \frac{F_A^L}{A}$$

ou

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} = EA \frac{(u_B^L - u_A^L)}{L}$$



Procedimento





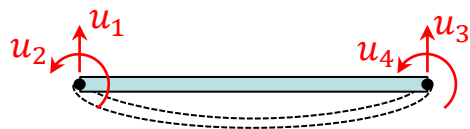
Matriz de rigidez de elementos de viga

2 g.l. por nó:

- flecha
- curvatura

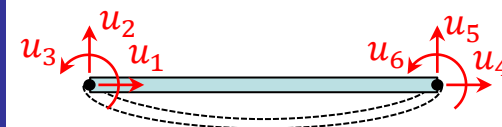
2DOF Beam element matrix

$$K_B = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



3 g.l. por nó:

- alongamento
- flecha
- curvatura



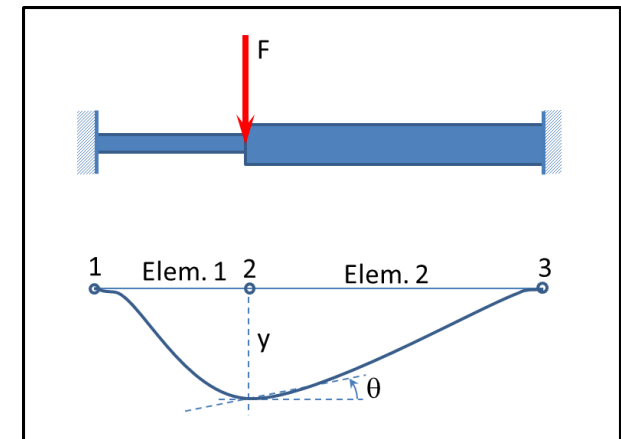
3DOF Beam Element matrix

$$k^b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} \\ -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} \end{bmatrix}$$



Exemplo 02: Análise Matricial de estruturas – Viga escalonada

A figura ilustra uma viga bi-engastada, escalonada em dois trechos, de comprimentos L e $2L$ e momentos de inércia I e $4I$ respectivamente. No ponto do escalonamento é aplicada uma força F conforme indicado na figura. É dada a matriz de rigidez para um elemento de viga genérico, considerando-se rigidez à flexão, cujos graus de liberdade são translação e curvatura. Resolva utilizando o método matricial. A estrutura está discretizada por dois elementos de viga.



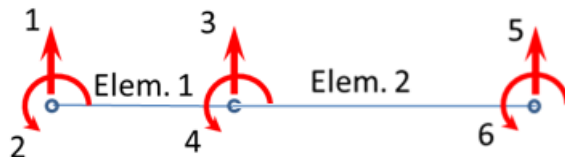
Pede-se:

- escrever a matriz de rigidez de cada elemento de viga;
- escrever a matriz de rigidez global da estrutura;
- escrever o vetor de esforços;
- reduzir o sistema de equações, considerando as condições de contorno dadas;
- resolver o sistema reduzido obtendo os deslocamentos desconhecidos;
- escrever as equações de equilíbrio matriciais que permitiriam calcular as reações nas extremidades e o momento fletor atuante na seção do escalonamento;
- escrever a máxima tensão de flexão nominal na seção do escalonamento em função do momento fletor aí atuante. Considere uma seção transversal retangular de base “b” e altura “h”. Indique no esboço da seção transversal a variação da tensão de flexão ao longo da mesma.
- Para a verificação do dimensionamento seria adequado considerar um fator concentrador de tensões. Este fator seria função de quais parâmetros?



Exemplo 02: (continuação)

Discretização:



$$[k]_{local}^{el,i} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} & -\frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} \\ \frac{6EI_i}{L_i^2} & 4EI_i & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & 2EI_i \\ \frac{L_i^2}{L_i} & L_i & \frac{L_i^2}{L_i} & L_i \\ -\frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} \\ \frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{2EI_i}{L_i} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{4EI_i}{L_i} \\ \frac{L_i^2}{L_i} & L_i & \frac{L_i^2}{L_i} & L_i \end{bmatrix} \quad [K]\{u\} = \{f\}$$

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_4 \\ y_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_4 \\ f_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

Não há necessidade de transformação de um sistema de coordenadas local para o global, pois eles são coincidentes neste caso.

Assim, a matriz de rigidez do elemento #1 resulta em:

$$[k]_{local}^{el,1} = [k]_{global}^{el,1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & 2EI \\ \frac{L^2}{L} & L & \frac{L^2}{L} & L \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{L^2}{L} & L & \frac{L^2}{L} & L \end{bmatrix}$$



Exemplo 02: (continuação)

Para o elemento#2:

$$[k]_{local}^{el.2} = [k]_{global}^{el.2} = \begin{bmatrix} \frac{12E(4I)}{(2L)^3} & \frac{6E(4I)}{(2L)^2} & -\frac{12E(4I)}{(2L)^3} & \frac{6E(4I)}{(2L)^2} \\ \frac{6E(4I)}{(2L)^2} & \frac{4E(4I)}{(2L)} & -\frac{6E(4I)}{(2L)^2} & \frac{2E(4I)}{(2L)} \\ -\frac{12E(4I)}{(2L)^3} & -\frac{6E(4I)}{(2L)^2} & \frac{12E(4I)}{(2L)^3} & -\frac{6E(4I)}{(2L)^2} \\ \frac{6E(4I)}{(2L)^2} & \frac{2E(4I)}{(2L)} & -\frac{6E(4I)}{(2L)^2} & \frac{4E(4I)}{(2L)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{6EI} & \frac{6EI}{8EI} & -\frac{6EI}{6EI} & \frac{6EI}{4EI} \\ \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{6EI} & -\frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{4EI} & \frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{8EI} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez global e o vetor de esforços são mostrados a seguir:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{6EI} & \frac{4EI}{4EI} & -\frac{6EI}{6EI} & \frac{2EI}{2EI} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} & -\frac{L^2}{18EI} & \frac{L}{0} & -\frac{6EI}{6EI} & \frac{6EI}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & \frac{2EI}{2EI} & \frac{L^3}{0} & \frac{12EI}{12EI} & -\frac{6EI}{6EI} & \frac{L^2}{4EI} \\ \frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} & -\frac{6EI}{6EI} & -\frac{6EI}{6EI} & \frac{6EI}{6EI} & -\frac{6EI}{6EI} \\ 0 & 0 & -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{4EI} & \frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{8EI} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_2 \\ -F \\ 0 \\ f_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$



Exemplo 02: (continuação)

Sendo a viga bi-engastada, a matriz reduzida resulta em:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{18EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix}$$

A equação de equilíbrio reduzida:

$$\begin{bmatrix} \frac{18EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e então:

$$\begin{Bmatrix} y_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{18EI} & 0 \\ 0 & \frac{L}{12EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultando assim:

$$\begin{Bmatrix} y_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-FL^3}{18EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Exemplo 02: (continuação)

Obtendo os esforços de extremidade em cada elemento discretizado:

Escrevendo a equação matricial de equilíbrio para o elemento #1 pode-se obter os esforços de extremidade no mesmo:

$$\{f\}_{local}^{el.1} = [k]_{local}^{el.1} \{u\}_{local}^{el.1} = [k]_{local}^{el.1} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{2EI}{L^2} \\ \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{4EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{FL^3}{18EI} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2F}{3} \\ \frac{FL}{3} \\ \frac{3}{2F} \\ -\frac{3}{FL} \end{Bmatrix}$$

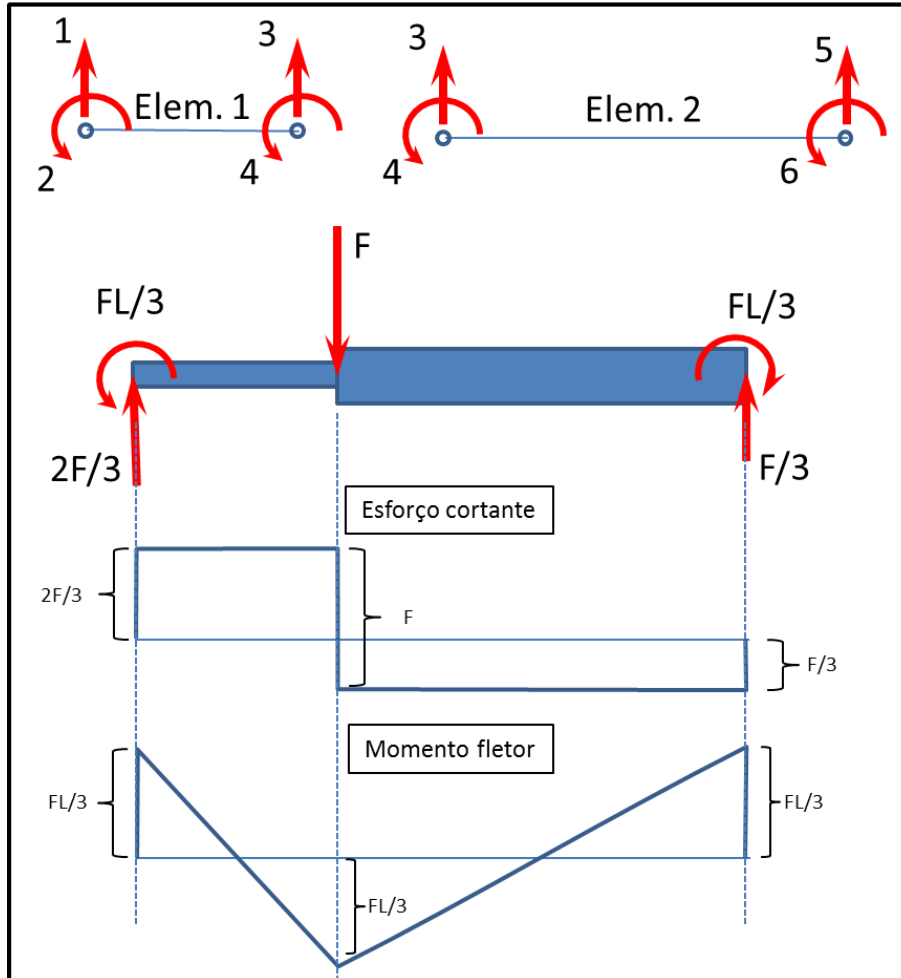
Da mesma forma para o elemento #2:

$$\begin{Bmatrix} f_3 \\ M_4 \\ f_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^3} & \frac{8EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^2} \\ \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{4EI} & \frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{8EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{FL^3}{18EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{F}{3} \\ \frac{FL}{3} \\ \frac{3}{F} \\ \frac{FL}{3} \end{Bmatrix}$$



Exemplo 02: (continuação)

Os diagramas de corpo livre, de esforços cortantes e de momentos fletores na viga resultam então assim:



A máxima tensão de flexão na seção do escalonamento (para encontrar-se o valor mais crítico, “b” e “h” devem ser obviamente os da seção transversal menor):

$$\sigma = \frac{M h/2}{I} = \frac{M h/2}{bh^3/12} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{2FL}{bh^2}$$



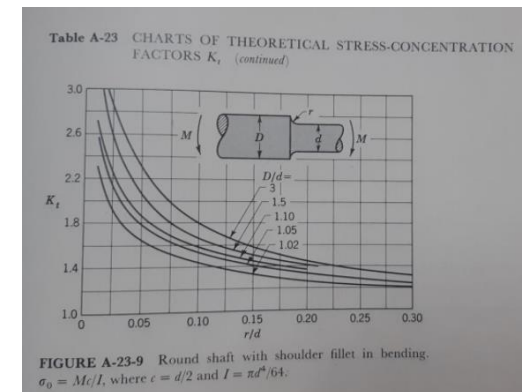
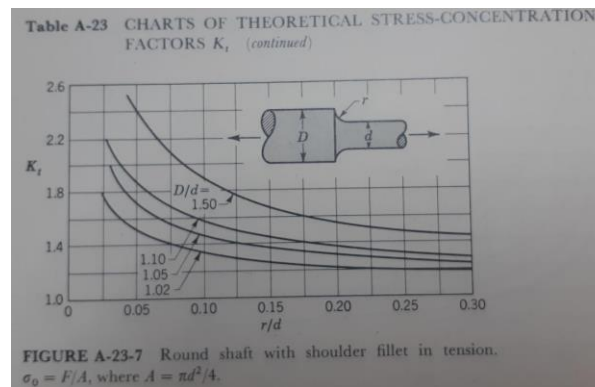
Exemplo 02: (continuação)

A tensão calculada é uma seção nominal.

Há fatores de concentração de tensões que não foram considerados nesta discretização do modelo físico real em simples elementos de viga.

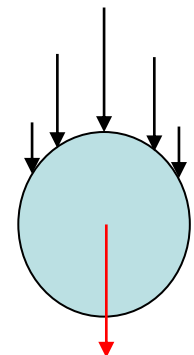
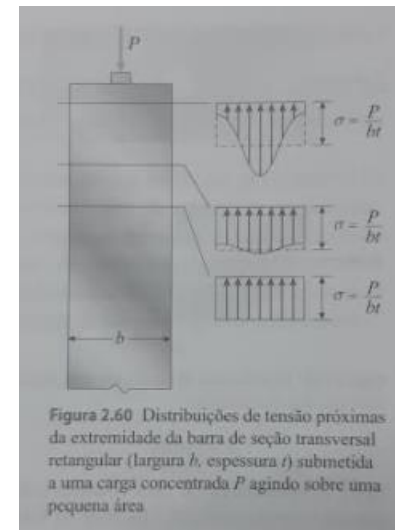
Vide abaixo:

Poderia ser considerado fator de concentração de tensões devido ao escalonamento. Este é função da razão entre as alturas da seção no escalonamento e do raio de adoçamento na base do escalonamento.



Outro fator de concentração que poderia ser considerado seria devido à forma de aplicação da carga. A aplicação teórica é pontual, na linha neutra da viga. Seria necessária uma descrição da forma de aplicação real da carga para avaliação da eventual concentração de tensões que poderia daí decorrer.

Vide “Princípio de Saint-Venant”.





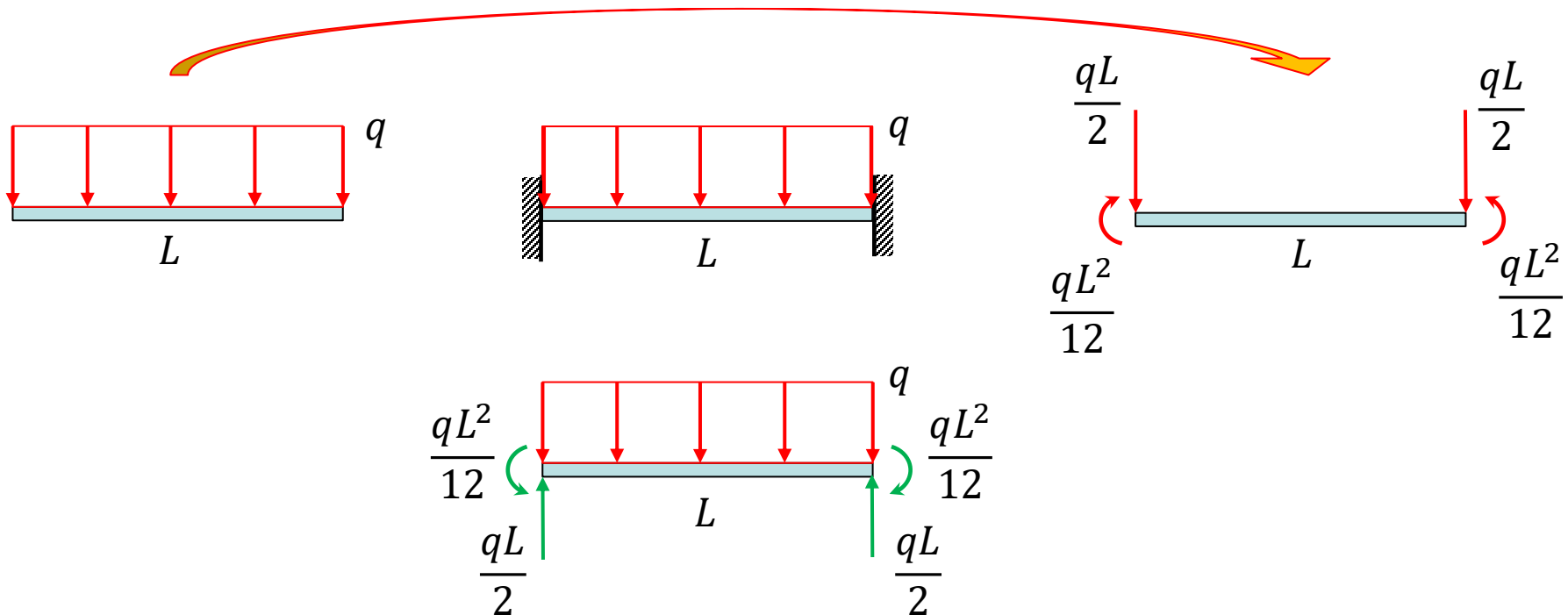
Carregamento Nodal Equivalente

Procedimento para transformar cargas quaisquer em cargas nodais

Procedimento:

1. Considera-se o elemento com todos os graus de liberdade restringidos (engaste).
2. Calcula-se as reações ao carregamento externo imposto.
3. Estas reações, com sinal invertido, são o carregamento nodal equivalente.

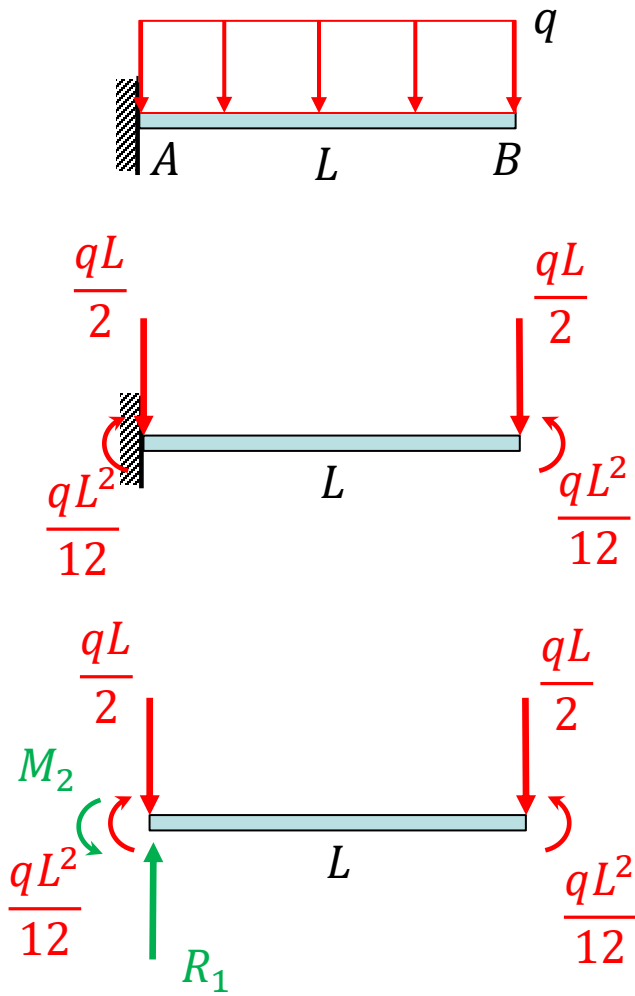
Obs.: Há uma forma de determinação do carregamento nodal equivalente para forças distribuídas (em arestas, superfícies ou volumes dos elementos), consistente com o procedimento do método dos elementos finitos, que será apresentada mais adiante.





Exemplo 03: Carregamento Nodal Equivalente

Procedimento para transformar cargas quaisquer em cargas nodais



$$[K]\{u\} = \{F_{ext}\}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} + R_1 \\ -\frac{qL^2}{12} + M_2 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} + R_1 \\ -\frac{qL^2}{12} + M_2 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

**Exemplo 03: (continuação)**

Matriz de Rigidez reduzida: $[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

Invertendo a Matriz de Rigidez reduzida:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por L/2 e somando na 2ª:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ 0 & L^2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a 2ª linha por 6/L e somando na 1ª:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & L^2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 4 & \frac{6}{L} \\ L & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por $\frac{1}{12}$:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2L} \\ L & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a 2ª linha por $\frac{1}{L^2}$:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Verificando a inversão: $[K][K]^{-1} = [I]$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa da Matriz de Rigidez reduzida:

$$[K]^{-1} = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$



Exemplo 03: (continuação)

$$[K]^{-1} = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2L \\ 1 & 1 \\ 2L & L^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2L \\ 1 & 1 \\ 2L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL^4}{8EI} \\ \frac{qL^3}{6EI} \end{Bmatrix}$$

Obtendo as reações no engaste: $\{F_{ext}\} = \{F_{reativas}\} + \{F_{ativas}\} = [K]\{u\}$

$$\{F_{reativas}\} = [K]\{u\} - \{F_{ativas}\}$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} + R_1 \\ \frac{qL^2}{12} + M_2 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI} \\ -\frac{qL^3}{6EI} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI} \\ -\frac{qL^3}{6EI} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \frac{EI}{L^3} \left(\frac{12qL^4}{8EI} - \frac{qL^4}{EI} \right) + \frac{qL}{2} \Rightarrow$$

$$R_1 = qL$$

$$M_2 = \frac{EI}{L^3} \left(\frac{6qL^5}{8EI} - \frac{qL^5}{3EI} \right) + \frac{qL^2}{12} \Rightarrow$$

$$M_2 = \frac{qL^2}{2}$$



Exemplo 03: (continuação)

Obtendo os diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores:

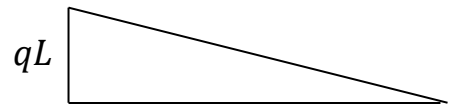
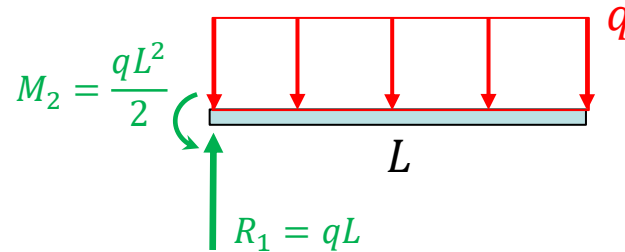


Diagrama de esforços cortantes

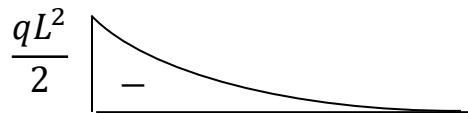


Diagrama de momentos fletores

Aqui no diagrama de momentos fletores estamos indicando negativo porque causa tração na parte superior da viga. Veja então que a convenção de sinais do momento fletor está contrária ao sentido positivo adotado para o grau de liberdade de rotação. O momento externo na extremidade direita é anti-horário, positivo segundo a orientação adotada.



Procedimento alternativo para evitar a singularidade da matriz de rigidez

(Alternativo ao procedimento de redução, podendo-se assim inverter a matriz rigidez completa).

Procedimento:

1. Adicionar valor arbitrariamente grande no termo da diagonal principal correspondente ao grau de liberdade para o qual o deslocamento é conhecido.
2. Caso haja deslocamento imposto diferente de zero, adicionar também este deslocamento imposto multiplicado pelo mesmo número arbitrariamente grande no vetor de carregamento no grau de liberdade correspondente.

$$u_j = \delta_j$$

$$k'_{jj} = k_{jj} + 10^{10}$$

$$F'_j = F_j + \delta_j \times 10^{10}$$

Como arbitrariamente grande entenda um valor da ordem de 10^{10} vezes maior do que o maior valor de rigidez da diagonal principal.

A rigidez naquele grau de liberdade fica absurdamente aumentada, fazendo o deslocamento daquele grau de liberdade tender ao valor conhecido imposto, retirando a singularidade da matriz de rigidez (cuja interpretação era a condição livre da estrutura, isto é, não vinculada, com deslocamentos então indeterminados).

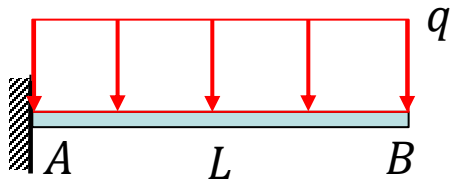
$$k_{1j}u_1 + k_{2j}u_2 + \dots + (k_{jj} + 10^{10})u_j + \dots + k_{Nj}u_N = F_j + \delta_j \times 10^{10}$$

$$(10^{10})u_j \cong \delta_j \times 10^{10}$$

$$u_j \cong \delta_j$$



Exemplo 04: Procedimento alternativo para evitar a singularidade da matriz de rigidez



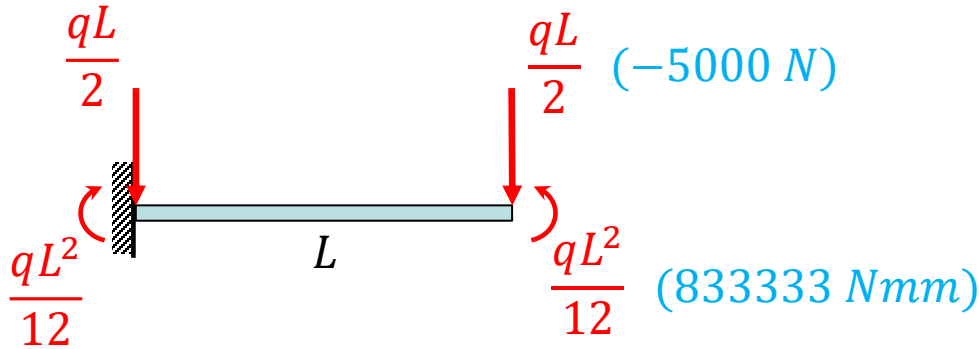
$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$I = 80000 \text{ mm}^4$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

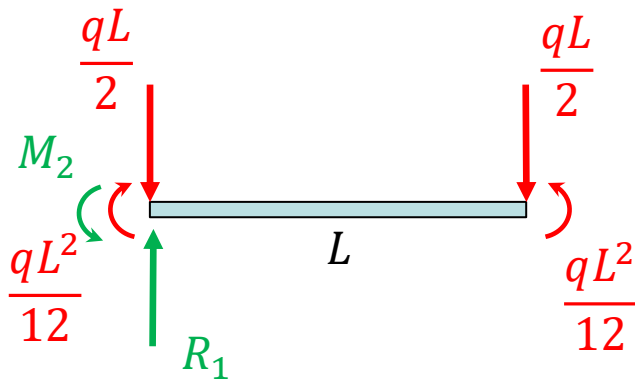
$$q = 10 \text{ N/mm}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI} \\ -\frac{qL^3}{6EI} \end{Bmatrix}$$



$$u_3 = -74,4 \text{ mm}$$

$$u_4 = -0,099 \text{ rad}$$





Exemplo 04: (continuação)

E	210000	MPa	<i>Matriz de rigidez completa original</i>				<i>É singular... Não tem inversa!</i>					
I	80000	mm ⁴	2,02E+02	1,01E+05	-2,02E+02	1,01E+05	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!		
L	1000	mm	1,01E+05	6,72E+07	-1,01E+05	3,36E+07	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!		
q	10	N/mm	-2,02E+02	-1,01E+05	2,02E+02	-1,01E+05	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!		
			1,01E+05	3,36E+07	-1,01E+05	6,72E+07	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!		
			<i>Acrescentando rigidez nos graus de liberdade vinculados</i>				<i>Inversa da matriz de rigidez com os termos com rigidez aumentada</i>				<i>esforços</i>	<i>deslocamentos</i>
u ₁	0	mm	1,00E+18	1,01E+05	-2,02E+02	1,01E+05	1,00E-18	2,52E-47	1,00E-18	0,00E+00	0	0,000
u ₂	0	rad	1,01E+05	1,00E+18	-1,01E+05	3,36E+07	-1,32E-47	1,00E-18	1,00E-15	1,00E-18	0	0,000
u ₃	-74,4048	mm	-2,02E+02	-1,01E+05	2,02E+02	-1,01E+05	1,00E-18	1,00E-15	1,98E-02	2,98E-05	-5000	-74,4048
u ₄	-0,09921	rad	1,01E+05	3,36E+07	-1,01E+05	6,72E+07	-7,34E-37	1,00E-18	2,98E-05	5,95E-08	833333,3	-0,09921

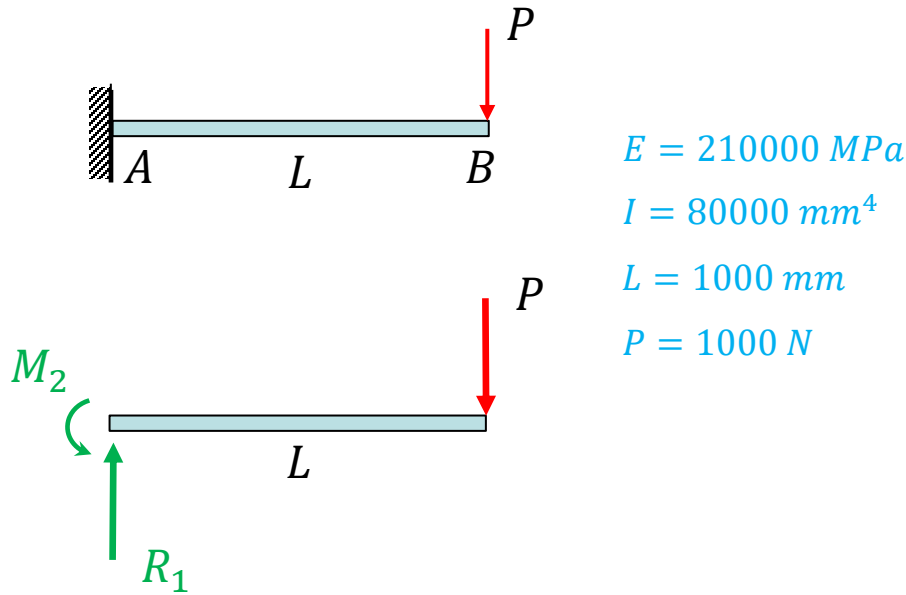
dados fornecidos

resultados calculados



Exemplo 05: Deslocamento Imposto

(Resolvido com o procedimento alternativo para evitar a singularidade da matriz de rigidez)



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{PL^3}{3EI} \\ \frac{PL^2}{2EI} \end{Bmatrix}$$

$$u_3 = -19,841 \text{ mm}$$

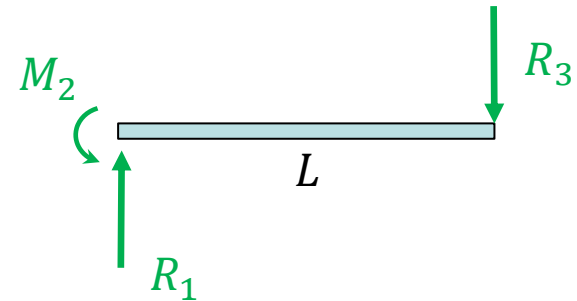
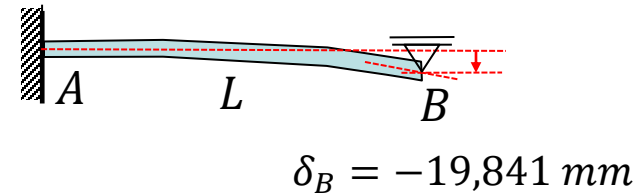
$$u_4 = -0,0298 \text{ rad}$$

$$R_1 = P = 1000 \text{ N}$$

$$M_2 = PL = 10^6 \text{ Nmm}$$

Para o deslocamento imposto na extremidade livre, pede-se:

- qual a rotação na extremidade livre?
- quais são os esforços aplicados à viga ?



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -19,841 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$u_4 = -0,0298 \text{ rad}$$

$$R_1 = 1000 \text{ N}$$

$$M_2 = 10^6 \text{ Nmm}$$

$$R_3 = -1000 \text{ N}$$



Exemplo 05: (continuação)

E	210000	MPa
I	80000	mm ⁴
L	1000	mm
u ₃	-19,841	mm

Matriz de rigidez completa original

	2,02E+02	1,01E+05	2,02E+02	1,01E+05
	1,01E+05	6,72E+07	1,01E+05	3,36E+07
	2,02E+02	1,01E+05	2,02E+02	1,01E+05
	1,01E+05	3,36E+07	1,01E+05	6,72E+07

É singular... Não tem inversa!

	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Acrescentando rigidez nos graus de liberdade vinculados

u ₁	0	mm
u ₂	0	rad

	1,00E+18	1,01E+05	2,02E+02	1,01E+05
	1,01E+05	1,00E+18	1,01E+05	3,36E+07
	2,02E+02	1,01E+05	1,00E+18	1,01E+05
	1,01E+05	3,36E+07	1,01E+05	6,72E+07

Inversa da matriz de rigidez com os termos com rigidez aumentada

	1,00E-18	-5,04E-32	5,04E-35	-1,50E-21
	-5,04E-32	1,00E-18	5,04E-32	-5,00E-19
	5,04E-35	5,04E-32	1,00E-18	1,50E-21
	-1,50E-21	-5,00E-19	1,50E-21	1,49E-08

esforços

	0
	0
	-1,9841E+19
	0

deslocamentos

	0,000
	0,000
	-19,8410
	-0,02976

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

Matriz de rigidez completa original

	2,02E+02	1,01E+05	-2,02E+02	1,01E+05
	1,01E+05	6,72E+07	-1,01E+05	3,36E+07
	-2,02E+02	-1,01E+05	2,02E+02	-1,01E+05
	1,01E+05	3,36E+07	-1,01E+05	6,72E+07

deslocamentos

	0,000
	0,000
	-19,8410
	-0,02976

esforços

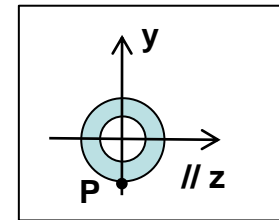
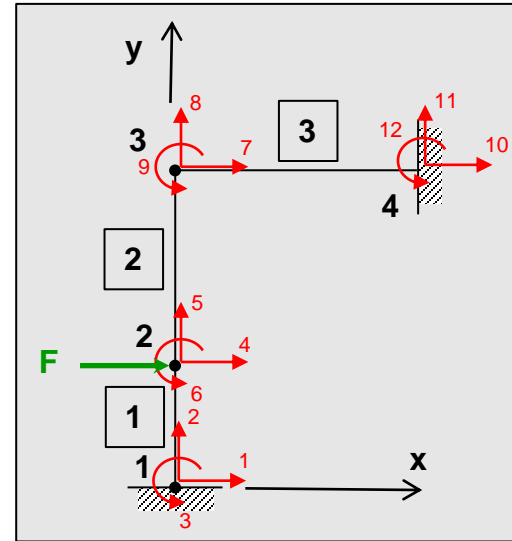
	1000
	999986
	-1000
	0



Exemplo 06:

Para a barra de seção transversal circular ilustrada, discretizada conforme indicado, pede-se resolver utilizando o método matricial considerando-se matriz de rigidez de viga de 3 graus de liberdade por nó:

- escrever a matriz de rigidez local de cada elemento;
- escrever a matriz de transformação de coordenadas de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global da estrutura;
- escrever o vetor de esforços externos;
- reduzir o sistema considerando as condições de contorno dadas;
- inverter a matriz de rigidez;
- obter os deslocamentos desconhecidos (nós 2 e 3);
- obter as forças de reação;
- obter os esforços no elemento 3;
- desenhar os diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço normal no elemento 3;
- obter o estado de tensões no ponto P, nó 3, pelo elemento 3 (vide seção transversal indicada), desprezando esforço cortante;
- obter as tensões principais neste ponto;
- obter a tensão equivalente neste ponto pelos critérios de Rankine, de Tresca e de Von Mises e verificar o dimensionamento.



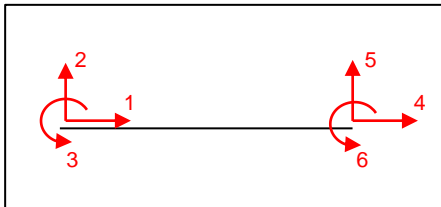
nó	x [mm]	y [mm]
1	0	0
2	0	1000
3	0	3000
4	1500	3000

F	5000	[N]
E	210000	[MPa]
Poisson	0,3	
ϕ_{ext}	30	[mm]
A	700	[mm ²]
I	40000	[mm ⁴]
Sy	480	[MPa]
A ₈₀	0,15	



Exemplo 06: (continuação)

Dada a matriz de rigidez de um elemento de viga com 3 graus de liberdade por nó, quais sejam, deslocamento longitudinal, deslocamento lateral (flecha) e rotação:



3DOF Beam Element matrix

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} \\ -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



Exemplo 06: (continuação)

		Matrizes de rigidez locais						Matrizes de Transformação de coordenadas						Matrizes de Transformação de coordenadas Transposta					
		1	2	3	4	5	6												
Elemento 1	1	147000	0	0	-147000	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0	0	0	0
	2	0	100,8	50400	0	-100,8	50400	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
	3	0	50400	33600000	0	-50400	16800000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	4	-147000	0	0	147000	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0
	5	0	-100,8	-50400	0	100,8	-50400	0	0	0	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
	6	0	50400	16800000	0	-50400	33600000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Elemento 2	7	73500	0	0	-73500	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0	0	0	0
	8	0	12,6	12600	0	-12,6	12600	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
	9	0	12600	16800000	0	-12600	8400000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	10	-73500	0	0	73500	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0
	11	0	-12,6	-12600	0	12,6	-12600	0	0	0	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
	12	0	12600	8400000	0	-12600	16800000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Elemento 3	13	98000	0	0	-98000	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
	14	0	29,86667	22400	0	-29,8667	22400	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0
	15	0	22400	22400000	0	-22400	11200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	16	-98000	0	0	98000	0	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
	17	0	-29,8667	-22400	0	29,86667	-22400	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	1,00	0
	18	0	22400	11200000	0	-22400	22400000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

**Exemplo 06: (continuação)**

		[K][T]					
Elemento 1		9,00E-12	1,47E+05	0,00E+00	-9,00E-12	-1,47E+05	0,00E+00
		-1,01E+02	6,17E-15	5,04E+04	1,01E+02	-6,17E-15	5,04E+04
		-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07
		-9,00E-12	-1,47E+05	0,00E+00	9,00E-12	1,47E+05	0,00E+00
		1,01E+02	-6,17E-15	-5,04E+04	-1,01E+02	6,17E-15	-5,04E+04
		-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	5,04E+04	-3,09E-12	3,36E+07
Elemento 2		4,50E-12	7,35E+04	0,00E+00	-4,50E-12	-7,35E+04	0,00E+00
		-1,26E+01	7,72E-16	1,26E+04	1,26E+01	-7,72E-16	1,26E+04
		-1,26E+04	7,72E-13	1,68E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06
		-4,50E-12	-7,35E+04	0,00E+00	4,50E-12	7,35E+04	0,00E+00
		1,26E+01	-7,72E-16	-1,26E+04	-1,26E+01	7,72E-16	-1,26E+04
		-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	-7,72E-13	1,68E+07
Elemento 3		9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
		0,00E+00	2,99E+01	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
		0,00E+00	2,24E+04	2,24E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
		-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
		0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
		0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07



Exemplo 06: (continuação)

		[T] ^T [K][T]					
Elemento 1		1,01E+02	9,00E-12	-5,04E+04	-1,01E+02	-9,00E-12	-5,04E+04
		9,00E-12	1,47E+05	3,09E-12	-9,00E-12	-1,47E+05	3,09E-12
		-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07
		-1,01E+02	-9,00E-12	5,04E+04	1,01E+02	9,00E-12	5,04E+04
		-9,00E-12	-1,47E+05	-3,09E-12	9,00E-12	1,47E+05	-3,09E-12
		-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	5,04E+04	-3,09E-12	3,36E+07
Elemento 2		1,26E+01	4,50E-12	-1,26E+04	-1,26E+01	-4,50E-12	-1,26E+04
		4,50E-12	7,35E+04	7,72E-13	-4,50E-12	-7,35E+04	7,72E-13
		-1,26E+04	7,72E-13	1,68E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06
		-1,26E+01	-4,50E-12	1,26E+04	1,26E+01	4,50E-12	1,26E+04
		-4,50E-12	-7,35E+04	-7,72E-13	4,50E-12	7,35E+04	-7,72E-13
		-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	-7,72E-13	1,68E+07
Elemento 3		9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
		0,00E+00	2,99E+01	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
		0,00E+00	2,24E+04	2,24E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
		-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
		0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
		0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07



Exemplo 06: (continuação)

Matriz de Rigidez Global

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,01E+02	9,00E-12	-5,04E+04	-1,01E+02	-9,00E-12	-5,04E+04	0	0	0	0	0	0
2	9,00E-12	1,47E+05	3,09E-12	-9,00E-12	-1,47E+05	3,09E-12	0	0	0	0	0	0
3	-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07	0	0	0	0	0	0
4	-1,01E+02	-9,00E-12	5,04E+04	1,13E+02	1,35E-11	3,78E+04	-1,26E+01	-4,50E-12	-1,26E+04	0	0	0
5	-9,00E-12	-1,47E+05	-3,09E-12	1,35E-11	2,21E+05	-2,32E-12	-4,50E-12	-7,35E+04	7,72E-13	0	0	0
6	-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	3,78E+04	-2,32E-12	5,04E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06	0	0	0
7	0	0	0	-1,26E+01	-4,50E-12	1,26E+04	9,80E+04	4,50E-12	1,26E+04	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
8	0	0	0	-4,50E-12	-7,35E+04	-7,72E-13	4,50E-12	7,35E+04	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
9	0	0	0	-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	2,24E+04	3,92E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
10	0	0	0	0	0	0	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
11	0	0	0	0	0	0	0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
12	0	0	0	0	0	0	0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07

Deslocamentos

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F_{ext}\}$$

Matriz de Rigidez Global Reduzida e Invertida

	4	5	6	7	8	9
4	1,32E-02	-1,01E-06	-1,10E-05	2,27E-06	-3,02E-06	6,62E-06
5	-1,01E-06	6,80E-06	1,51E-09	2,59E-10	6,80E-06	-4,53E-09
6	-1,10E-05	1,51E-09	2,98E-08	-3,97E-09	4,53E-09	-9,92E-09
7	2,27E-06	2,59E-10	-3,97E-09	1,02E-05	7,77E-10	-1,70E-09
8	-3,02E-06	6,80E-06	4,53E-09	7,77E-10	2,04E-05	-1,36E-08
9	6,62E-06	-4,53E-09	-9,92E-09	-1,70E-09	-1,36E-08	2,98E-08

Carga
5000
0
0
0
0
0

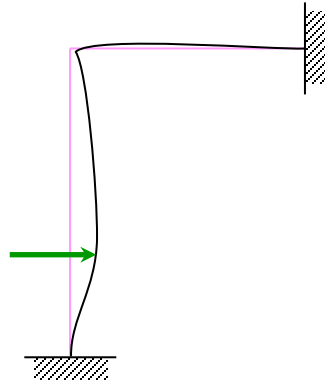
4	6,61E+01
5	-5,04E-03
6	-5,51E-02
7	1,13E-02
8	-1,51E-02
9	3,31E-02



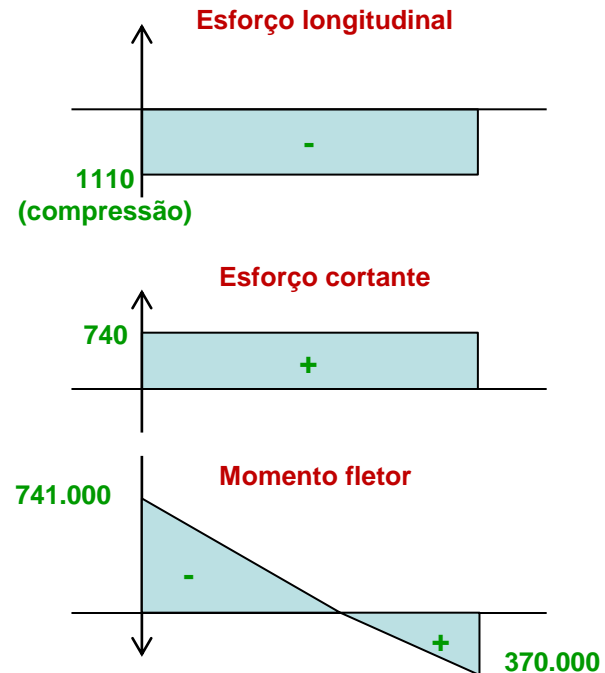
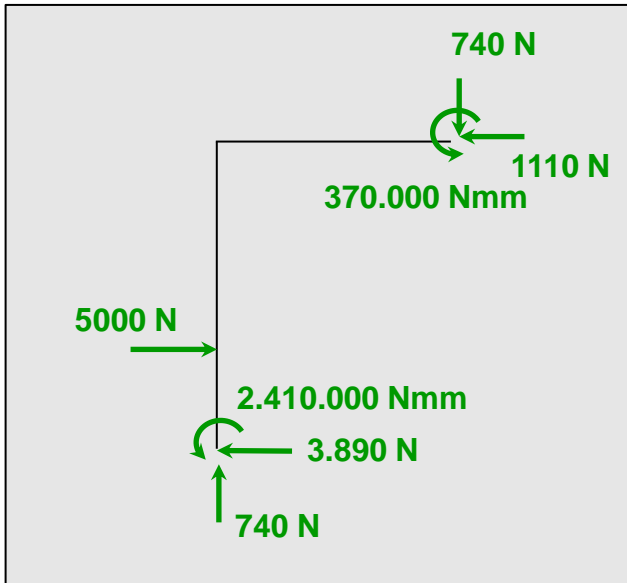
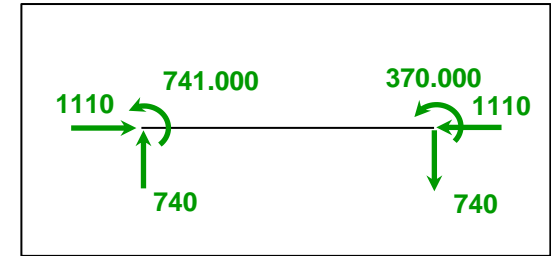
Exemplo 06: (continuação)

	Deslocamentos	Reações
1	0	-3,89E+03
2	0	7,40E+02
3	0	2,41E+06
4	6,61E+01	5,00E+03
5	-5,04E-03	2,55E-14
6	-5,51E-02	-5,24E-10
7	1,13E-02	5,68E-13
8	-1,51E-02	0,00E+00
9	3,31E-02	-2,33E-10
10	0	-1,11E+03
11	0	-7,40E+02
12	0	3,70E+05

$$\{F_{ext}\} = [K]\{u\}$$



	desl. coords. locais elemento 3	esforços coords. locais elemento 3
7	1,13E-02	1,11E+03
8	-1,51E-02	7,40E+02
9	3,31E-02	7,41E+05
10	0,00E+00	-1,11E+03
11	0,00E+00	-7,40E+02
12	0,00E+00	3,70E+05



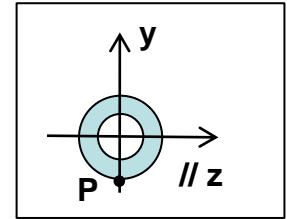


Exemplo 06: (continuação)

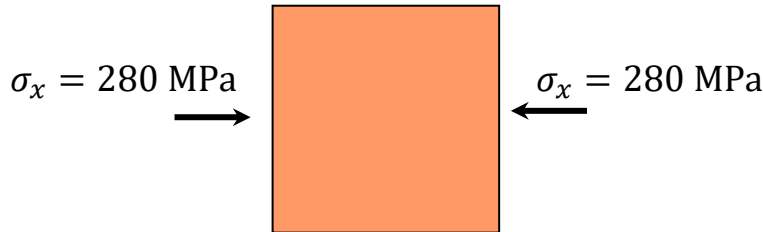
Analisando a seção transversal no nó 3, pelo elemento 3, no ponto P:

$$\sigma_{flexão} = \frac{M \frac{\phi}{2}}{I} = \frac{741000.15}{40000} = 278 \text{ MPa (em compressão no ponto P)}$$

$$\sigma_{longitudinal} = \frac{N}{A} = \frac{1110}{700} = 1,59 \text{ MPa (em compressão ao longo de todo o trecho)}$$



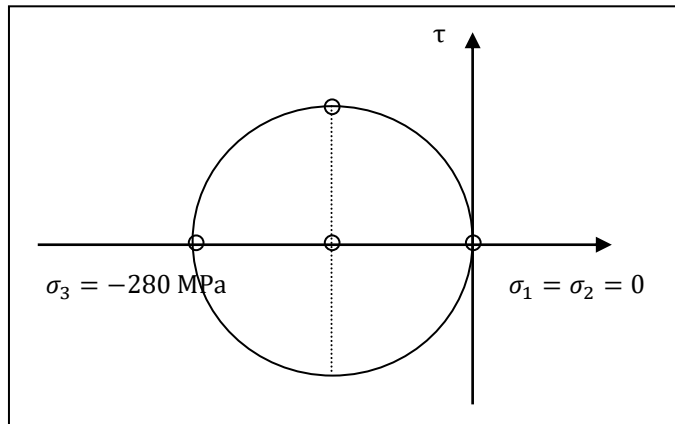
Como proposto no enunciado, desconsiderando a tensão de cisalhamento causada pelo efeito cortante:



Rankine: $\sigma_{eq} = -280 \text{ MPa}$

Tresca: $\sigma_{eq} = 280 \text{ MPa}$

Von Mises: $\sigma_{eq} = 280 \text{ MPa}$



Material é dúctil ($A_{80} = 15\%$), critérios de Tresca e Von Mises seriam adequados:

Neste ponto $\sigma_{eq} < S_y \Rightarrow OK!$

Todavia o ponto P não é o mais solicitado da estrutura!
O ponto mais solicitado está localizado no engaste do nó 1 onde o momento fletor é máximo.



FIM 04