Método de Newton Modificado

EP1 - CompIII - **Data de entrega: 22/09/2023**

1 Introdução

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) * f(b) < 0, \tag{1}$$

o método da dicotomia calcula uma raiz aproximada $\bar{x}$ de f no intervalo (a, b). Porém a convergência é lenta e por essa razão buscam-se métodos de convergência mais rápida para aproximar raízes. Entre eles, o Método de Newton é muito popular, quando f é derivável e podemos calcular a sua derivada. Porém, a convergência do Método de Newton só pode ser garantida localmente.

2 Método de Newton modificado

Este método consiste em combinar a certeza de convergência do Método da Dicotomia com a eficiência local do Método de Newton. Suponha que a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, tem uma raiz isolada no intervalo $[a, b]$ e satisfaz (1). Partindo-se da condição inicial x_0 dada pelo extremo do intervalo mais próximo da raiz, o intervalo que isola a raiz é modificado à medida que as iterações são calculadas, de forma que a nova aproximação é um dos extremos do novo intervalo e a função f troca de sinal neste intervalo.

As iterações são calculadas da seguinte forma. Se a próxima iteração usando a fórmula do Método de Newton cair fora do intervalo atual que isola a raiz, ou se o tamanho do passo a ser dado pelo método de Newton não decresce suficientemente em relação a passos anteriores, aplique o Método da Dicotomia para calcular a nova aproximação. Caso contrário, use o Método de Newton.

Suponha que a aproximação x_n já foi calculada, estando isolada no intervalo $[a_n, b_n]$ onde x_n é um dos extremos. A próxima iteração calculada pelo Método de Newton cairá dentro deste intervalo se e somente se (EXERCÍCIO)

$$[(x_n - a_n) * f'(x_n) - f(x_n)] * [(x_n - b_n) * f'(x_n) - f(x_n)] < 0. \tag{2}$$

Para decidir se o tamanho do passo está diminuindo de forma aceitável, pode-se compará-lo com a metade do tamanho do passo usado para se obter x_{n-1}. Admitindo-se que x_n já foi calculado e usando-se a notação $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, para o passo do Método de Newton ser menor do que a metade do passo anterior, a seguinte desigualdade deve ser satisfeita (EXERCÍCIO):

$$2 * |f(x_n)| < |f'(x_n) * \Delta x_n|. \tag{3}$$

Note que as desigualdades (2) e (3) foram apresentadas evitando-se divisões pela derivada de f. Usando estas desigualdades, a ideia pricipal do método pode ser esquematimazada da seguinte forma:

se $[(x_n - a_n) * f' - f] * [(x_n - b_n) * f' - f] < 0$ **e** $2 * |f| < |f' * \Delta x_n|$ **então**

calcule x_{n+1} pelo Método de Newton;

atualize o intervalo;

senão

calcule x_{n+1} pelo Método da Dicotomia;

atualize o intervalo.

Nas expressões acima, f e f' são calculadas no ponto x_n.

Em todo método iterativo é necessário impor crtitérios de parada. Por exemplo, pode-se usar uma tolerância $RTOL$ para o erro relativo entre duas aproximações consecutivas, delimitar o número máximo de iterações por um inteiro $MAXIT$ ou parar a execução na eventualidade de acharmos a raiz com a precisão usada. Ou seja, a execução é encerrada caso pelo menos uma das condições abaixo esteja satisfeita:

(a) $|\Delta x_n| < RTOL$;

(b) número de iterações igual a $MAXIT$;

(c) $f(x_n) = 0$.

Se o número de iterações atingir $MAXIT$, é aconselhável imprimir uma mensagem alertando este fato. Assim como verificar o valor de f na aproximação final calculada. Caso a raiz seja nula ou muito próxima de zero, o critério (a) pode nunca ser atigido e precisa ser modificado.

3 Tarefa

Implemente o método de Newton modificado conforme descrito na seção anterior, usando a linguagem Python (especificamente, Python 3). Documente bem o programa e pense cuidadosamente em quais informações relevantes fornecer a um usuário, tanto para a entrada como para a saída do programa. No relatório, discuta decisões relevantes para a elaboração do programa, as escolhas de parâmetros, bem como a análise dos resultados dos testes abaixo.

3.1 Queda de um corpo sob a ação da resistência do ar

A equação diferencial para a velocidade de um corpo de massa M em queda sob a ação de uma força de resistência do ar proporcional à velocidade é

$$M\dot{v}(t) - Mg + kv(t) = 0.$$

A solução com velocidade inicial $v(0) = v_0$ é dada por (verifique!)

$$v(t) = \frac{Mg - e^{-kt/M}(Mg - v_0 k)}{k}.$$

Supondo as constantes $g = 10$ e $M = 1$, determine o valor de k sabendo-se que com $v_0 = 3$ temos $v(2) = 20$.

3.2 Altura de fios de transmissão de eletricidade

Usando princípios da Física pode-se mostrar que quando um cabo flexível for pendurado entre dois postes, ele tomará a forma de uma curva $y = f(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão do cabo em sua parte mais baixa. Uma solução para a equação acima é dada por (verifique!)

$$f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g}{T}x\right).$$

Um cabo pendurado sempre toma a forma de uma *catenária*

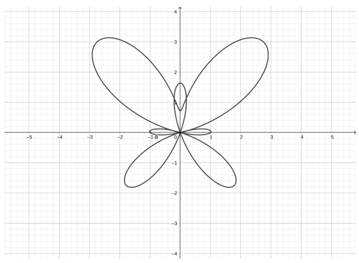
$$y = f(x) = \alpha + \beta\cosh\left(\frac{x}{\beta}\right)$$

onde α e β são constantes. Suponha que tenhamos um cabo pendurado entre $x = -10$ e $x = 10$. Determine o valor de β tal que a diferença de altura $f(10) - f(0)$ seja igual a 0.5.

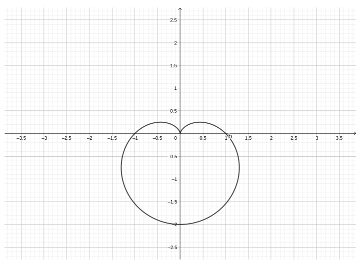
3.3 Interseção de curvas em coordenadas polares

Queremos saber quais os pontos de interseção duas a duas das curvas dadas em coordenadas polares abaixo. Para todas as curvas considere $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

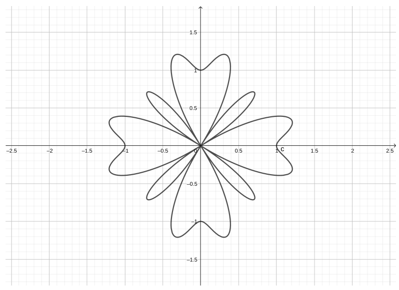
1. Curva da borboleta: $r = e^{\sin\theta} - 2\cos(4\theta)$.



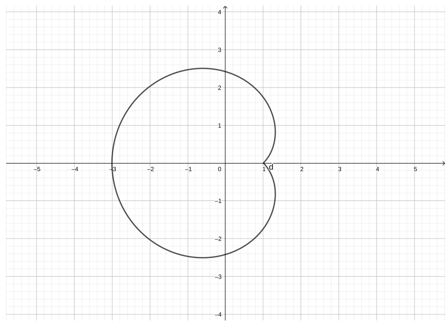
2. Cardióide: $r = 1 - \sin\theta$.



3. $r = \sin^2(4\theta) + \cos(4\theta)$.



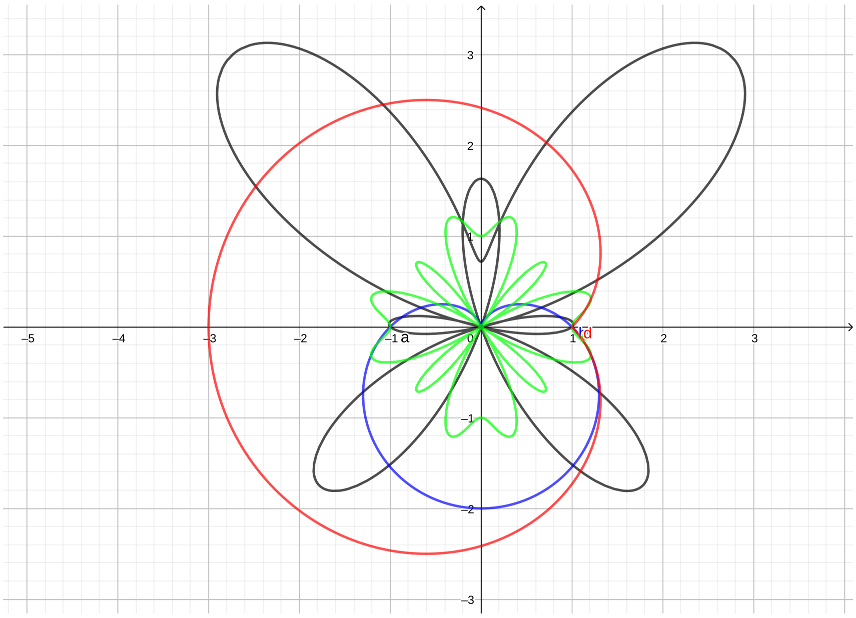
4. $r = 1 + 2\sin(\theta/2)$.



(veja na próxima página uma figura com todas as curvas, para se ter uma ideia da escala)

Observações:

- Veja que pedimos 6 conjuntos de interseções.
- Na curva da borboleta podemos ter $r < 0$. Assim, convém lembrar que um ponto com coordenadas polares (r, θ) é o mesmo que com coordenadas $(-r, \theta + \pi)$.
- Como o método descrito necessita de um intervalo onde a função troca de sinal, é possível que algumas interseções escapem.
- Um ponto de partida para aprocura automática dos zeros seria particionar o intervalo $[0, 2\pi]$ em, digamos, 100 subintervalos e depois testar cada um deles.



Todas as curvas