

Física IV (IF 2023)

Aula 12

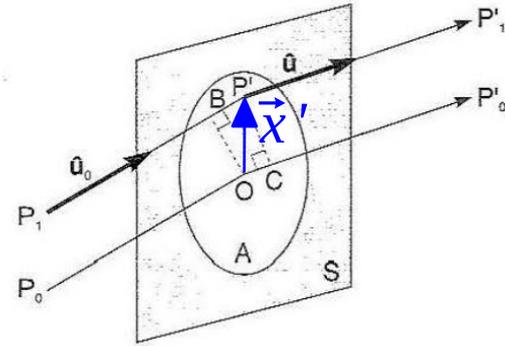
- Objetivos de aprendizagem:
 - Obter o padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular
 - Definir o Poder Separador (ou Poder de Resolução) de um aparelho óptico
 - Enunciar o Critério de Rayleigh
 - Reconhecer o Padrão de Airy
 - Enunciar o Princípio de Babinet
 - Descrever a difração por um objeto esférico
 - Explicar o efeito de Coroa de Difração da Lua

Síntese de resultados anteriores

- Difração de Fraunhofer (4.31):
- Amplitude de difração (4.31):

$$v(P) = a_0 f(k, \hat{u}, \hat{u}_0) \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$f(k, \hat{u}, \hat{u}_0) = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \int_A e^{ik(\hat{u}_0 - \hat{u}) \cdot \mathbf{x}'} d^2x'$$



- Incidência perpendicular à abertura: $\hat{u}_0 \cdot \vec{x}' = 0$
- Na notação da aula 18 (e $\cos \theta_0 \approx 1$):

$$v(P) = \frac{a_0}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{S_f} e^{-ik\hat{u} \cdot \vec{r}'} dS_f$$

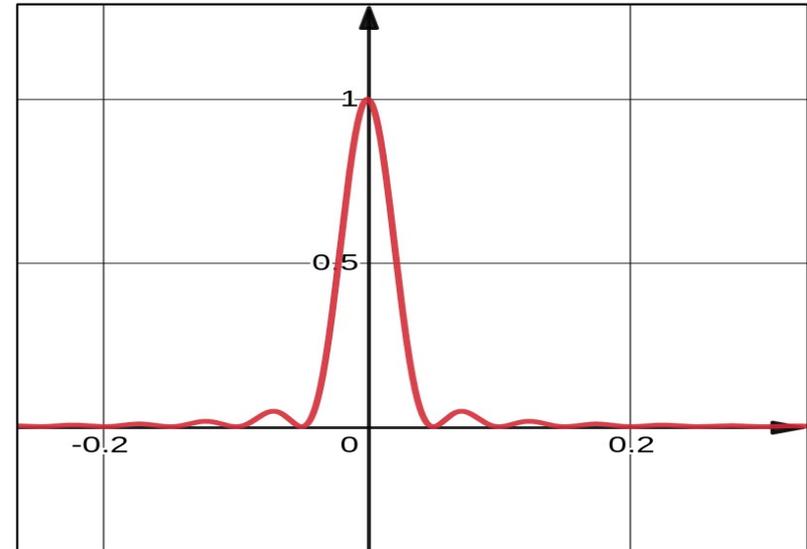
Intensidade normalizada ao pico central

$$\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{1}{(\sigma_A)^2} \left| \int_A e^{-ik\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}'} d^2 x' \right|^2$$

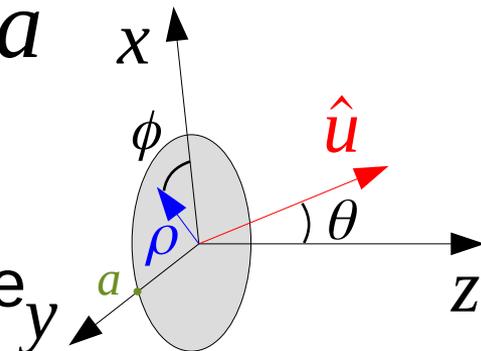
$$v(P) = \frac{a_0}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{S_f} e^{-ik\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}} dS_f$$

$$I(\hat{\mathbf{u}}) = v^*(P)v(P)$$

$$\frac{I(\hat{\mathbf{u}})}{I(\hat{\mathbf{u}}_0)} = \frac{1}{S_f^2} \left| \int_{S_f} e^{-ik\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}} dS_f \right|^2$$



Abertura circular de raio a



- Usar coordenadas cilíndricas para obter as componentes cartesianas do vetor direção de observação e coordenada do ponto P':

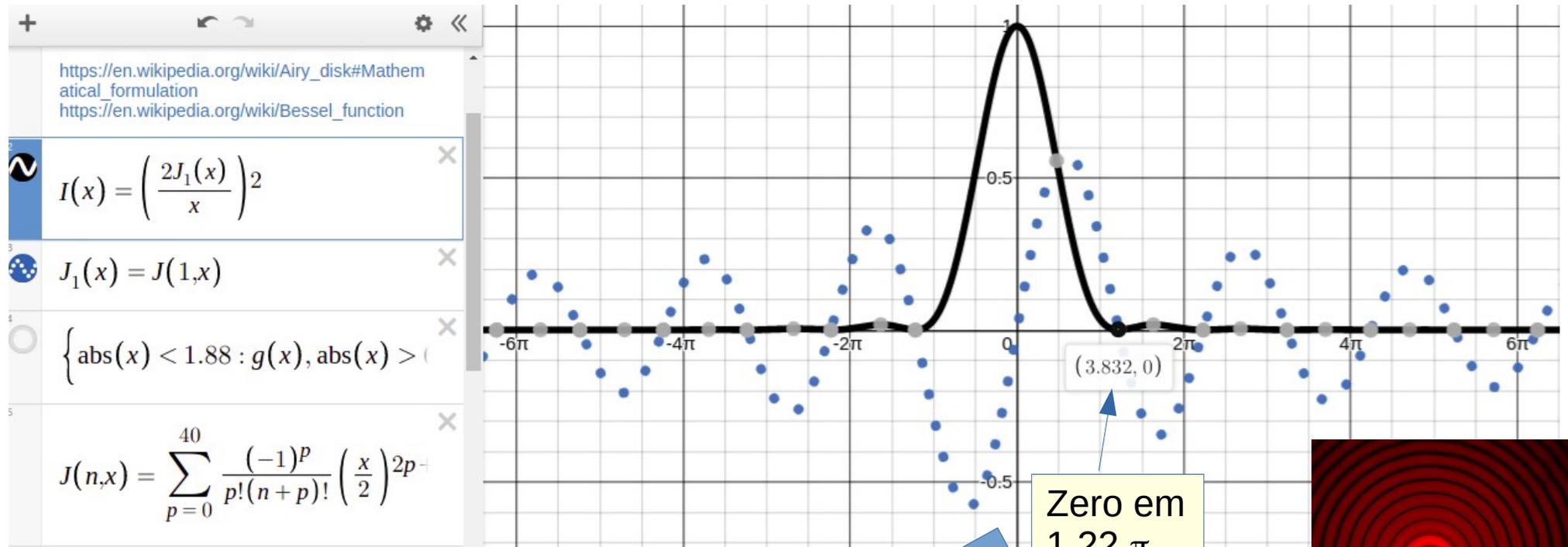
$$\hat{u} = (\sin \theta, 0, \cos \theta); \vec{r}' = \rho (\cos \phi, \sin \phi, 0); \hat{u} \cdot \vec{r}' = \rho \sin \theta \cos \phi$$

- \rightarrow Integral em phi e rho $\rightarrow \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \sin \theta \cos \phi} \rho d\rho d\phi$
- Função de Bessel $J_1(x)$

- Padrão de Airy:
$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = 4 \left[\frac{J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta} \right]^2 \quad (4.52)$$

Padrão de Airy e J_1 no Desmos

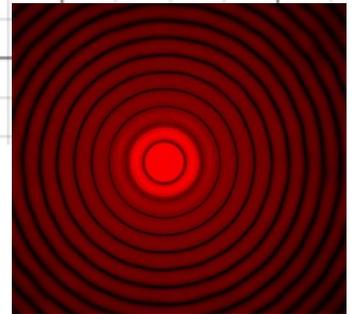
<https://www.desmos.com/calculator/h1jxwtrhyd>



$$x = ka \sin \theta$$
$$d = 2a$$

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \approx \theta$$

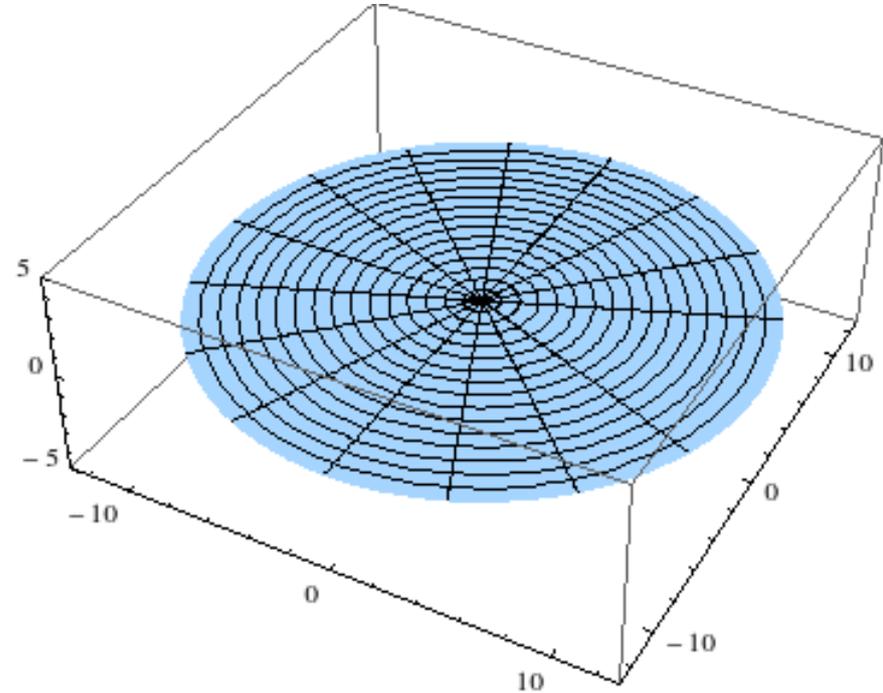
LASER
Furo com $d=90\mu\text{m}$



Funções de Bessel

Soluções da equação diferencial:

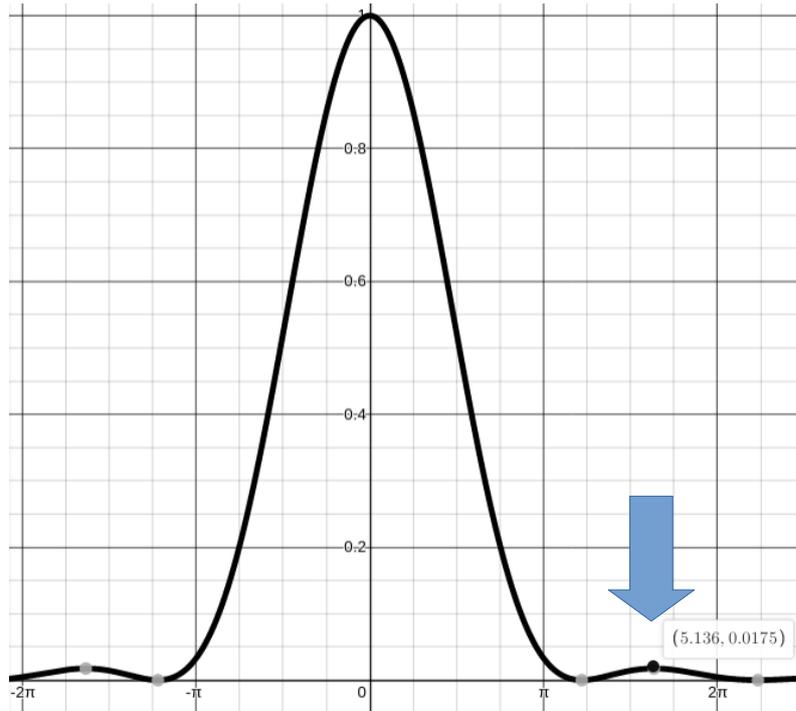
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$



Funções de Bessel são a parte radial dos modos de vibração de um tambor circular

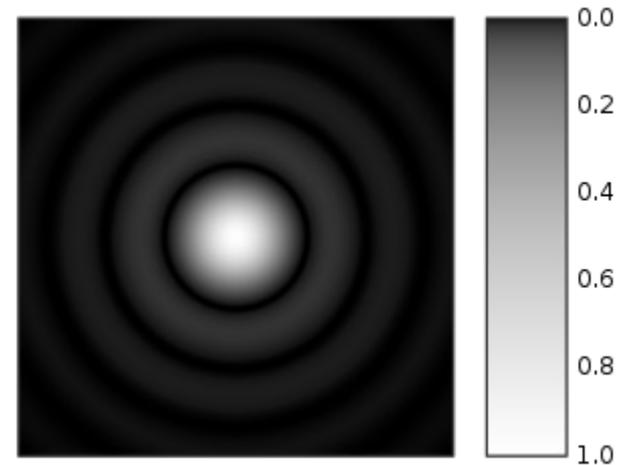
Padrão de Airy e disco de Airy

- A altura do segundo pico é ~ 0.018



Disco central ($\sim 84\%^*$ da potência total)
Semiângulo de abertura:

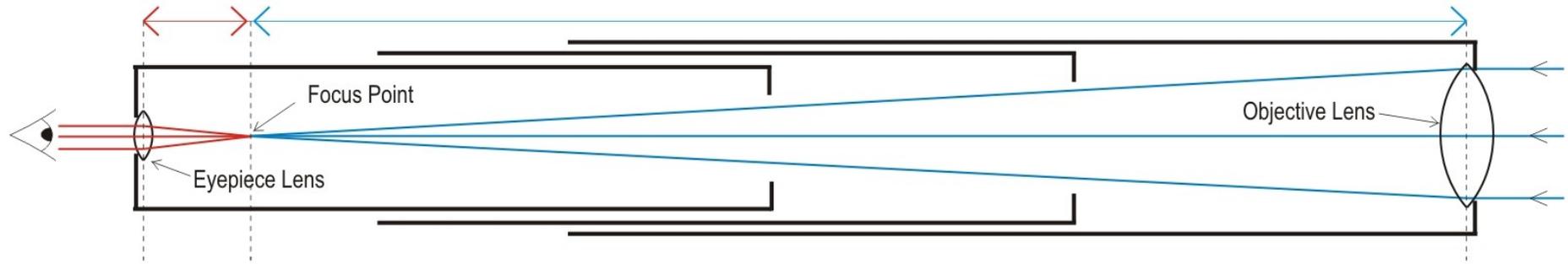
$$\Delta \theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{d}$$



Resolução

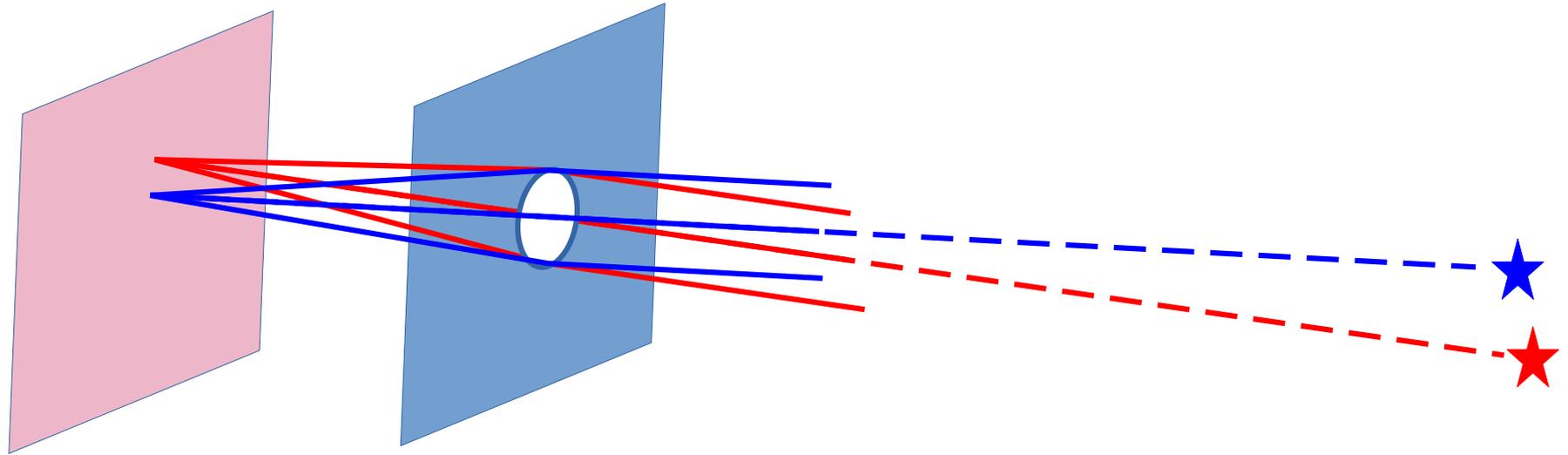
- A difração limita a resolução da imagem de um instrumento óptico (telescópio, microscópio etc.).
- Pontos angularmente próximos aparecem como dois borrões superpostos

Telescópio

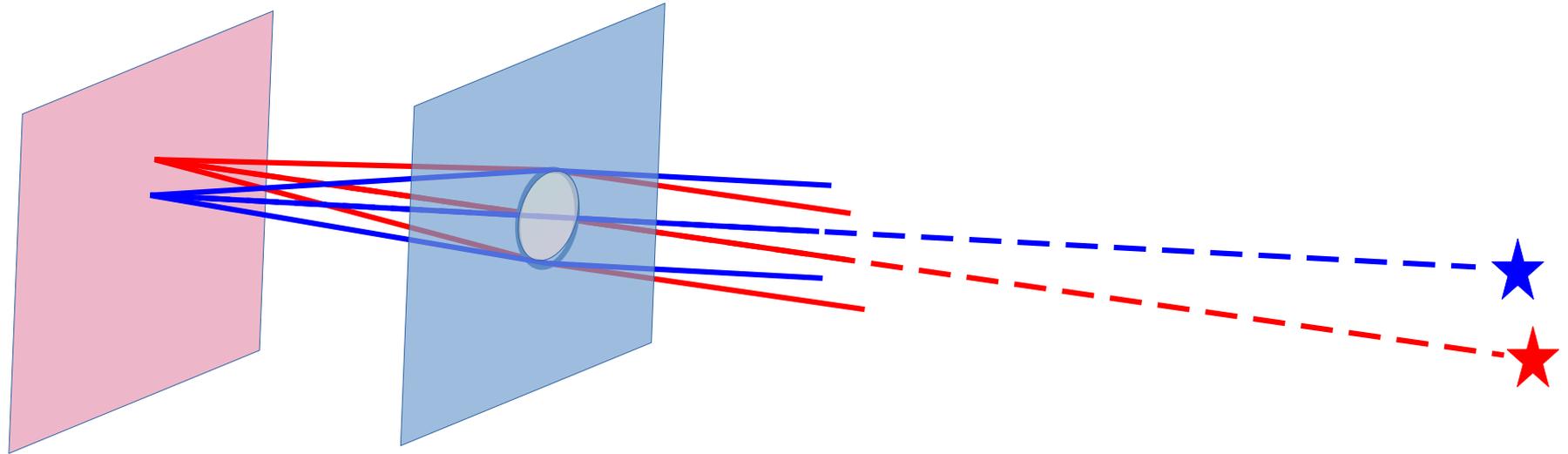


- Podemos admitir que uma estrela é “um ponto” em uma certa direção angular (estando muito distante, sua dimensão angular é desprezível).
- Os raios luminosos da estrela chegam praticamente paralelos à objetiva do telescópio.
- Idealmente todos estes raios se focalizariam em um ponto
- Porém, a objetiva pode ser considerada uma “abertura” num anteparo, onde ocorre difração
- No plano focal, a imagem não é um ponto, mas um disco de Airy

Observando 2 estrelas próximas

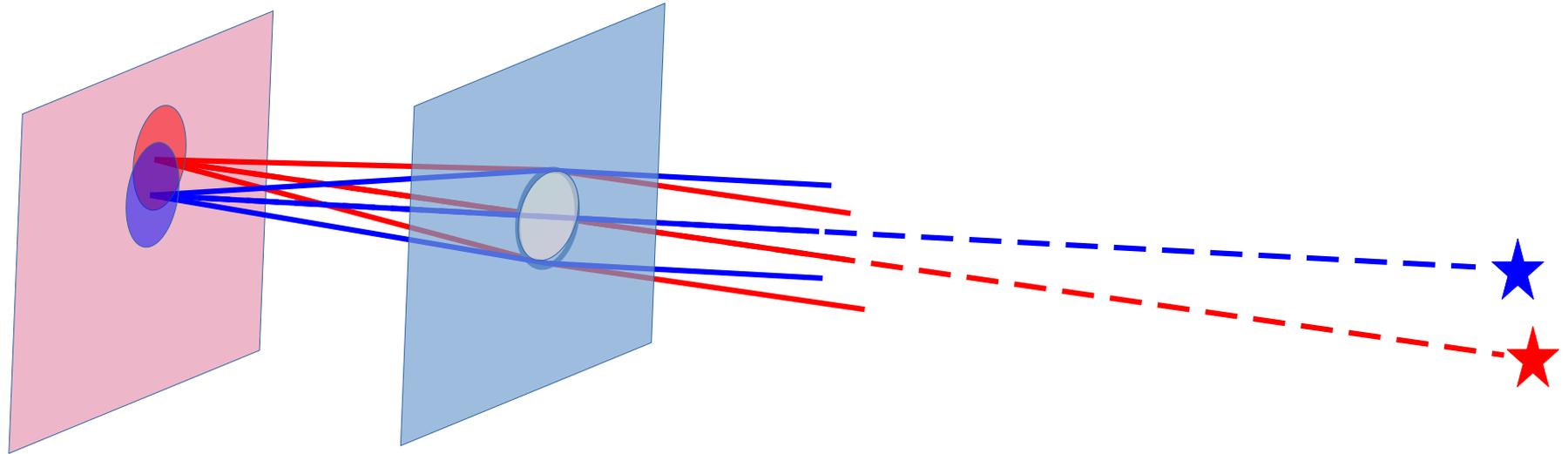


Observando 2 estrelas próximas

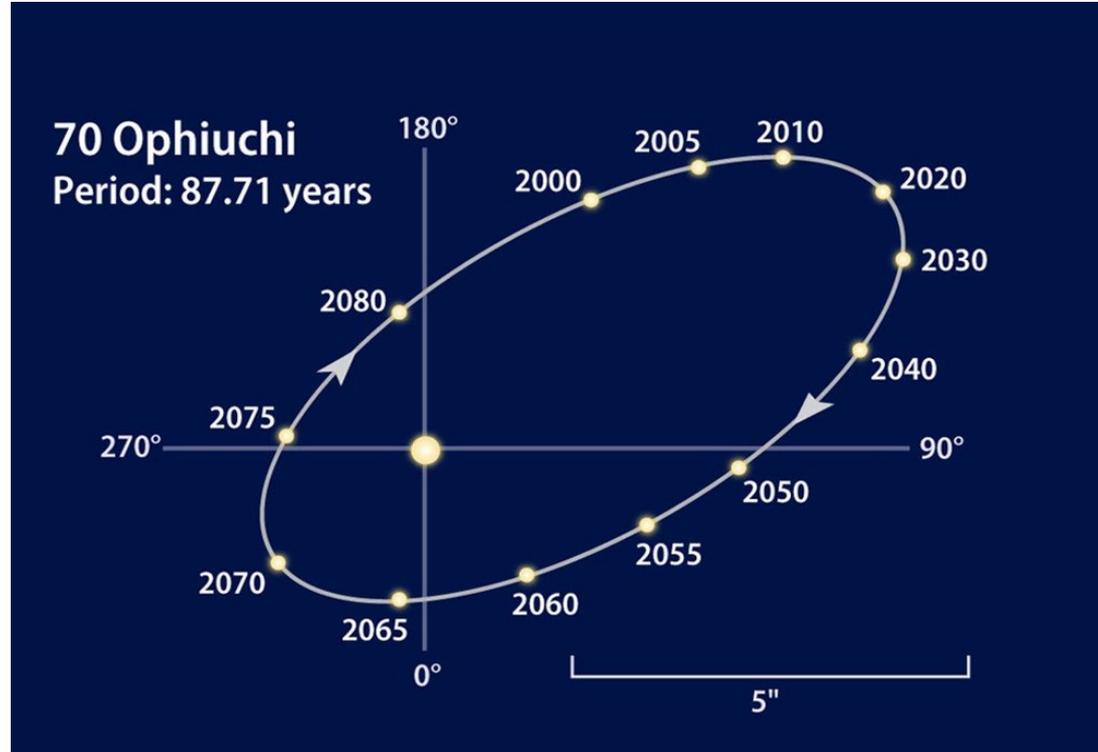


Observando 2 estrelas próximas

Discos de Airy superpostos



Estrelas binárias



5 segundos de arco = $(5/3600 \text{ graus}) = 2.4\text{E-}5 \text{ rad}$

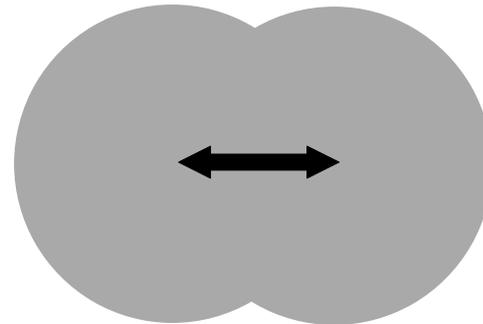
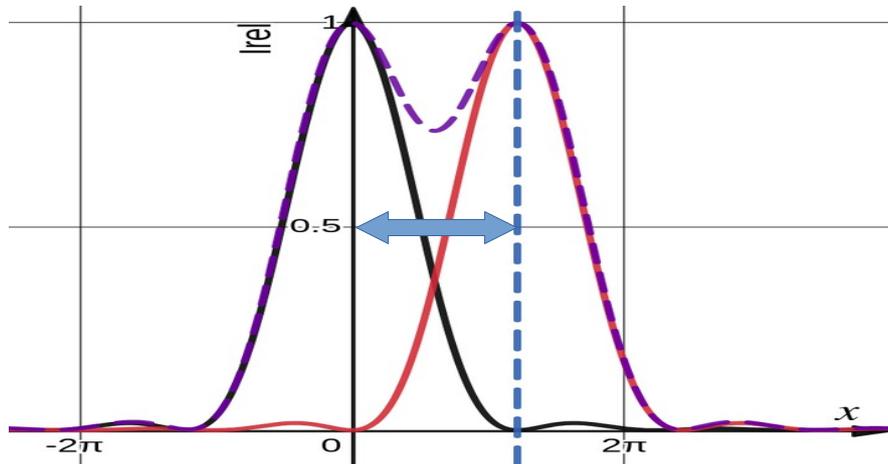
Betelgeuse

- “Diâmetro angular” $\sim 0.05''$ ($R \sim 300 R_S$) – medida com interferômetro



Cr terio de Rayleigh

- Duas dire es são separáveis (resolvíveis) pelo instrumento se estiverem a uma distância angular maior do que entre o máximo e o primeiro mínimo do padrão de Airy de difrac o
- O *poder de resolu o* angular seria essa diferença angular

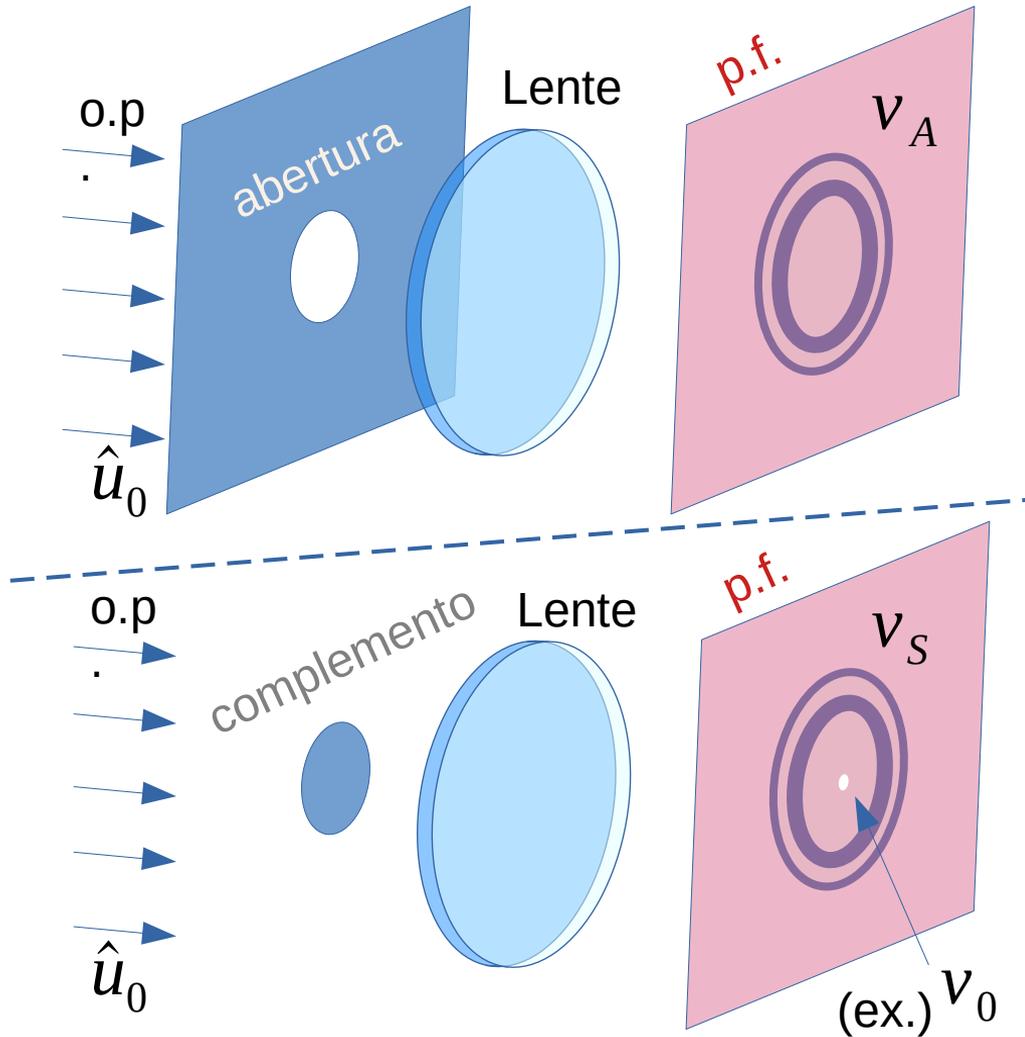


$$\Delta \theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

Princípio de Babinet

- O total é a soma das partes... (Não tão trivial, em se tratando de difração/interferência)
- O “total” é das amplitudes, não das intensidades:
$$v_0(P) = v_A(P) + v_S(P)$$
- Abertura x complemento (tampa da abertura) – Padrão de intensidades iguais! (exceto exatamente para frente).

$$\hat{u} \neq \hat{u}_0 \Rightarrow v_0(P) = 0$$



Intensidades iguais

$$v_0(P) = v_A(P) + v_S(P)$$

- Fora da direção de incidência, a onda plana dá zero.

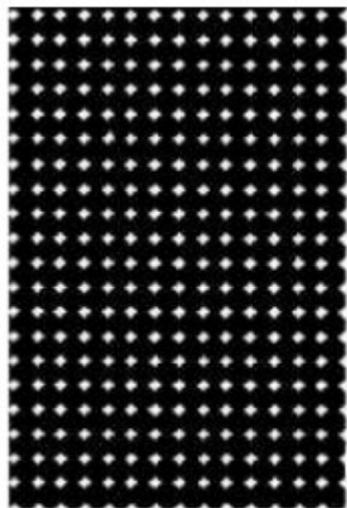
$$\hat{u} \neq \hat{u}_0 \Rightarrow v_0(P) = 0$$

$$v_A(P) = -v_S(P)$$

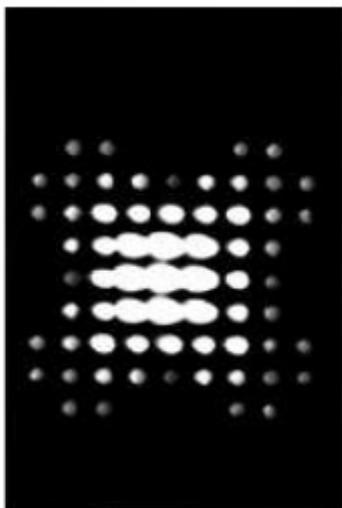
$$I_A(P) = v_A(P) v_A^*(P) = v_S(P) v_S^*(P) = I_S(P)$$

$$I_A(P) = I_S(P) \quad \text{Padrões de difração iguais!}$$

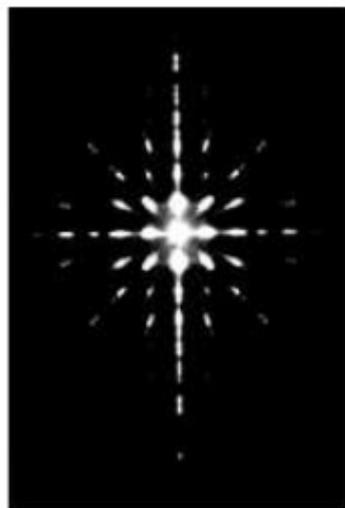
- Na direção de incidência $\hat{u} = \hat{u}_0 \Rightarrow v_0(P) \neq 0$



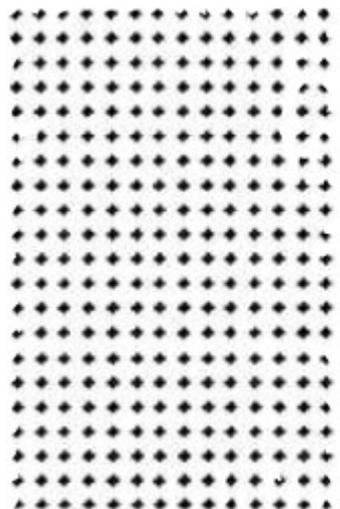
(a)



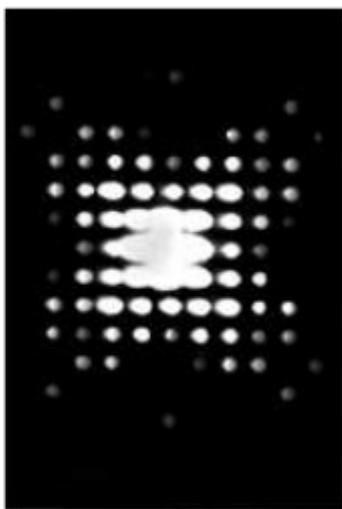
(b)



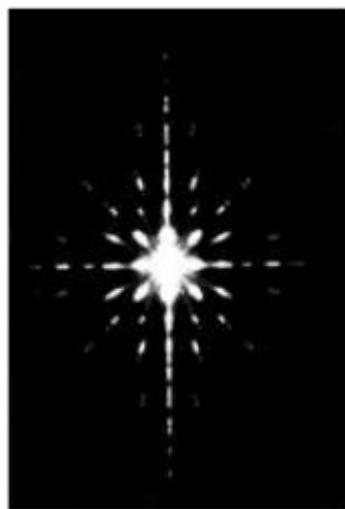
(c)



(c)



(d)

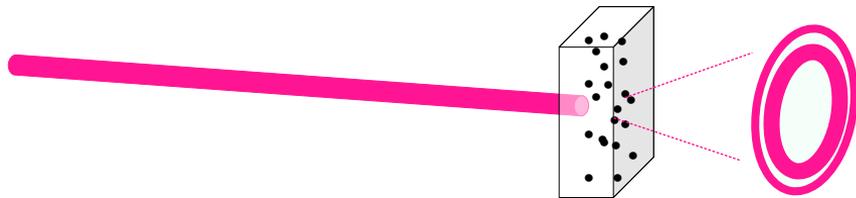
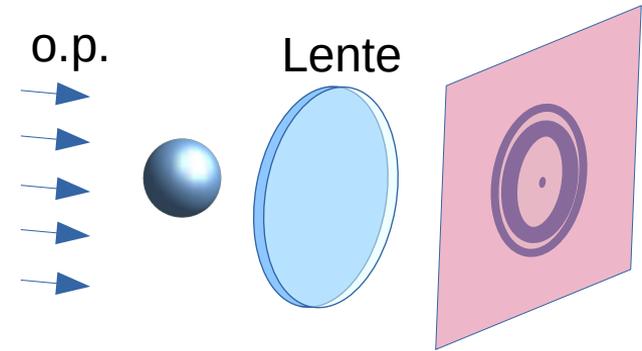


(e)

Figure 10.86 (a)–(d) White-light diffraction patterns for regular arrays of apertures and complementary obstacles in the form of rounded plus signs. (e) and (f) Diffraction patterns for a regular array of rectangular apertures and obstacles, respectively. (Richard B. Hoover, Ealing Electro-Optics, Inc.)

Difração por uma esfera

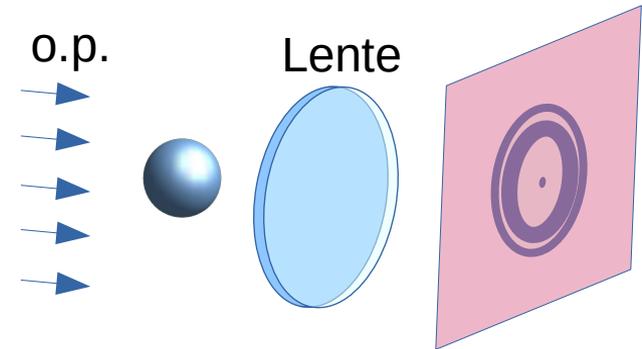
- ... é a mesma que de um disco circular com mesmo raio, já que bloqueia a mesma coisa (Fraunhofer..., claro, Fresnel pode ser diferente)
- Difração por uma porção de esferinhas de mesmo diâmetro



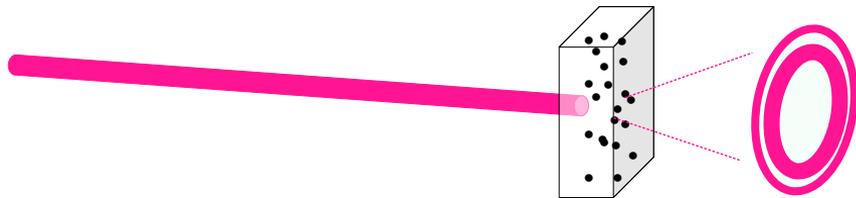
Obs. coerente ou incoerente?

Difração por uma esfera

- ... é a mesma que de um disco circular com mesmo raio, já que bloqueia a mesma coisa (Fraunhofer..., claro, Fresnel pode ser diferente)



- Difração por uma porção de esferinhas de mesmo diâmetro



- Corona lunar (dezenas de μm) \rightarrow

