2ª Lista de Exercícios - SME0822 Análise Multivariada e Aprendizado Não-Supervisionado

---

Exercício 1. Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ onde $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)^\top$ e verifique que é positiva semi-definida.

Exercício 2. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $A^\top A$ é simétrica.

Exercício 3. Seja $\underset{\sim}{Y}_1, \ldots, \underset{\sim}{Y}_n$ uma amostra aleatória de vetores p-dimensionais com matriz de variâncias e covariâncias Σ. Sejam $\underset{\sim}{a}$ e $\underset{\sim}{b}$ vetores reais $n \times 1$. Prove que $\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n a_i \underset{\sim}{Y}_i, \sum_{i=1}^n b_i \underset{\sim}{Y}_i) = 0$ se e somente se $\underset{\sim}{a}$ e $\underset{\sim}{b}$ forem ortogonais.

Exercício 4. Sejam A uma matriz $p \times p$ e $\underset{\sim}{Y}$ um vetor aleatório com média $\underset{\sim}{\mu}$ e matriz de variâncias e covariâncias Σ. Prove que $\mathrm{E}(\underset{\sim}{Y}^\top A \underset{\sim}{Y}) = tr(A\Sigma) + \underset{\sim}{\mu}^\top A \underset{\sim}{\mu}$.

Exercício 5. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I)$, com $\sigma^2 > 0$ e I a matriz identidade de ordem p. Mostre que $A\underset{\sim}{X}$ e $(I - A^- A)\underset{\sim}{X}$ são independentes e que cada uma tem distribuição normal. A matriz A^- é uma **inversa generalizada** de A, que satisfaz $AA^-A = A$ com A^-A simétrica.

Exercício 6. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e $\underset{\sim}{a}$ um vetor fixo qualquer de dimensão p. Mostre que

$$Z = \frac{\underset{\sim}{a}^\top (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})}{\sqrt{\underset{\sim}{a}^\top \Sigma \underset{\sim}{a}}} \sim N(0, 1).$$

Exercício 7. Se $\underset{\sim}{X} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de a para que $\underset{\sim}{b}^\top \underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{c}^\top \underset{\sim}{X}$ sejam independentes, com $\underset{\sim}{b}^\top = (1, 1, 1)$ e $\underset{\sim}{c}^\top = (1, -1, -1)$.

Exercício 8. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que a distribuição condicional de (X_1, X_2) dado X_3 tem média $[\mu_1 + \rho^2(X_3 - \mu_3), \mu_2]^\top$ e matriz de variâncias e covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9. Sejam $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$ e $\underset{\sim}{X}_3$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e considere $\underset{\sim}{Y}_1 = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{Y}_2 = \underset{\sim}{X}_2 + \underset{\sim}{X}_3$ e $\underset{\sim}{Y}_3 = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_3$. Obtenha a distribuição condicional de $\underset{\sim}{Y}_1 | \underset{\sim}{Y}_2$ e de $\underset{\sim}{Y}_1 | \underset{\sim}{Y}_2, \underset{\sim}{Y}_3$.

Exercício 10. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e considere a seguinte partição

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right),$$

em que $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$ são vetores aleatórios de dimensão $(q \times 1)$ e $(p - q \times 1)$, respectivamente. Mostre que $\Sigma_{12} = \underset{\sim}{0}$ implica independência entre $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$, utilizando a função densidade de probabilidade da normal multivariada (Veja dica no exercício 4.14 de Johnson and Wichern, 2007, p.204).

Exercício 11. Exercícios sugeridos de Johnson and Wichern (2007):

- 3.13, 3.16, 3.17, 3.20 pág 146-148
- 4.1, 4.3, 4.4, 4.8, 4.9, 4.17, 4.19, 4.22, 4.29, 4.39, 4.40, pág 200-208

Referências

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall