Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 2

24/08/2023

Observação: Lembre-se que subespaços vetoriais também são espaços vetoriais.

Questão 1. Seja $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o conjunto formado pelo polinômio nulo e pelos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

1. Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ são elementos de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ então

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

2. Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é um elemento de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2$$

Sabendo-se que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial, faça os seguintes itens:

1. Mostre que o conjunto $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R}) = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$ com as operações acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução: Temos que $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Para mostrarmos que $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial, basta mostrarmos que é um subespaço vetorial. Provemos então as 3 propriedades.

- O elemento neutro de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é o polinômio nulo. Ele está em $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$? A resposta é sim. Veja que o polinômio nulo é da forma $n(x) = 0$, logo, a sua imagem em 0 é $n(0) = 0$, portanto pertence a $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$.
- Tomemos dois polinômios p, q em $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$, onde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Temos que $p(0) = 0$ e $q(0) = 0$, porque p e q estão em $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$. Observe que como p e q pertencem a $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$, temos $a_0 = 0 = b_0$, então $p(x) = a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_1x + b_2x^2$. A soma desses polinômios pertence a $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$? Para responder isso, precisamos entender o que significa a soma estar nesse conjunto. Precisamos mostrar que ao somarmos dois polinômios desse conjunto, a imagem dessa soma em 0 é igual a 0. Vejamos como mostramos isso.

$$p(0) + q(0) \overset{\text{def. de soma de polinômios}}{=} (a_1 + b_1).0 + (a_2 + b_2).0^2 = 0 + 0 = 0.$$

  logo, $p + q \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$.
- Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$, isto é, $p(0) = 0$. Temos $\lambda p(x) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$? Para que pertença, temos que ter $\lambda p(0) = 0$, o que é verdade pois $\lambda p(0) = (\lambda.a_1).0 + (\lambda.a_2).0 = 0 + 0 = 0$.

$\blacksquare$

Comentários.

- Observe que mostramos que $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$ é espaço vetorial provando apenas as 3 propriedades de subespaço. Nós só pudemos fazer isso porque sabemos que $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, que com as operações usuais, é um espaço vetorial. Em resumo, não podemos mostrar que qualquer conjunto munido de duas operações é um espaço vetorial com apenas 3 propriedades, antes precisamos ver se ele é um subconjunto de um conjunto que munido de duas operações é um espaço vetorial.

2. O conjunto $\mathbb{P}_2^+(\mathbb{R}) = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : p(x) > 0\ \forall\, x\}$ com as operações acima é um subespaço vetorial? Justifique.

Solução: Temos que verificar se valem as 3 propriedades de subespaço vetorial. O polinômio nulo está em $\mathbb{P}_2^+(\mathbb{R})$? Se $n(x) = 0$ é o polinômio nulo, temos que ele não pertence a $\mathbb{P}_2^+(\mathbb{R})$ pois não é maior que 0, é exatamente igual a 0, em todo x. Portanto, a primeira propriedade não é satisfeita e o conjunto com as operações usuais de polinômios, não é subespaço vetorial.

$\blacksquare$

Questão 2. Seja $I = [0,1]$ e $\mathcal{C}(I)$ o conjunto das funções contínuas em I com as seguintes operações:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

Sabendo-se que $\mathcal{C}(I)$ com as operações acima é um espaço vetorial, pergunta-se: o conjunto

$$V = \{f \in \mathcal{C}(I) : f(0) = f(1)\}$$

é um subespaço? Justifique.

Solução: Vamos verificar se valem as três propriedades de subespaço vetorial.

- O elemento neutro de $\mathcal{C}(I)$ é a função nula $n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ela pertence ao conjunto V? Para pertencer temos que ter $n(0) = n(1)$. De fato temos, pois $n(0) = 0 = n(1)$. Provamos assim que a função nula pertence a V.

- Sejam $g, h \in \{f \in \mathcal{C}(I) : f(0) = f(1)\}$, isto é, $g(0) = g(1)$ e $h(0) = h(1)$. Temos que verificar se $(g+h)(0) = (g+h)(1)$. Vejamos.

$$(g+h)(0) \overset{\text{def. de soma de funções}}{=} g(0) + h(0) \overset{\{g(0)=g(1),\, h(0)=h(1)\}}{=} g(1) + h(1) \overset{\text{def. de soma}}{=} (g+h)(1).$$

logo, $g+h$ pertence ao conjunto.

- Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g \in V$, isto é, $g(0) = g(1)$. Temos que provar que λg pertence a V. De fato temos, pois
$$(\lambda g)(0) = \lambda g(0) = \lambda g(1) = (\lambda g)(1)$$
o que mostra que λg pertence ao conjunto V e com isso mostramos que V é um subespaço vetorial.

$\blacksquare$

Questão 3. Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais de vetores. Mostre que um plano passando pela origem é um espaço vetorial.

Solução: Um plano passando pela origem é um conjunto da forma $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$. Observe que $W \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$ é espaço vetorial, logo, para provar que W é espaço vetorial, precisamos apenas mostrar as 3 propriedades de subespaço.

- Temos que provar que o elemento neutro de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $(0, 0, 0)$, está em W. Temos que $a.0 + b.0 + c.0 = 0 + 0 + 0 = 0$, logo, $(0, 0, 0) \in W$.

- Tomemos $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Temos $u + v \in W$? Isto é, se $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, nós temos

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0?$$

  A resposta é sim! Vejamos.

$$\begin{aligned} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) &= a.x_1 + a.x_2 + b.y_1 + b.y_2 + c.z_1 + c.z_2 \\ &= (a.x_1 + b.y_1 + c.z_1) + (a.x_2 + b.y_2 + c.z_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  logo, $u + v \in W$.

- Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$, isto é, $a.x_1 + b.y_1 + c.z_1 = 0$. Temos que verificar se $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ pertence a W. Isso significa que devemos provar que

$$a.(\lambda x_1) + b.(\lambda y_1) + c.(\lambda z_1) = 0.$$

  Isso é verdade, pois

$$a.(\lambda x_1) + b.(\lambda y_1) + c.(\lambda z_1) = \lambda a.x_1 + \lambda b.y_1 + \lambda c.z_1 = \lambda(a.x_1 + b.y_1 + c.z_1) = \lambda 0 = 0.$$

  Logo, $\lambda u \in W$.

$\blacksquare$

Comentários.

- Veja que a, b, c são constantes arbitrárias fixadas. O que isso significa? Significa que para a, b, c reais, variando x, y e z, obtemos um plano. Só estamos mudando os valores de x, y, z, e deixando fixos a, b e c. Por exemplo, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ é um plano com $a = b = c = 1$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 2y + 3z = 0\}$ é um plano com $a = b = 2$ e $c = 3$. Colocamos as letras a, b e c para representar números reais de maneira geral. Portanto, ao não atribuirmos valores específicos a a, b e c, mostramos na questão 3 que tanto U quanto V são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, pois são casos particulares da questão 3.