Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304

Atividade Bônus 1

17/08/2023

Questão 1. No conjunto $\mathbf{V} = \{(x, y)); x, y \in \mathbb{R}\}$ definamos "adição" da seguinte forma:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$$

e multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Nessas condições, $\mathbf{V}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

Solução: Se V é um espaço vetorial, deve haver um elemento (x_0, y_0) tal que:

$$(x, y) + (x_0, y_0) = (x, y) \ \forall \ x, y \ \in \mathbb{R},$$

ou seja, (x_0, y_0) denota o elemento neutro com relação à adição. No entanto, considerando como a soma foi definida, temos que:

$$(x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0, 0)$$

e então a igualdade $(x + x_0, 0) = (x, y)$ só pode ser verdadeira se $y = 0$. Como estamos tomando um elemento genérico $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para o qual pode ocorrer $y \neq 0$, temos uma contradição e, portanto, V **NÃO** é um espaço vetorial com as operações acima definidas.

■

Comentários. Lembre-se que para a conclusão sobre V não ser um espaço vetorial é suficiente mostrar que o axioma do elemento neutro não é válido.

Questão 2. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}\}$ munido das seguintes operações:

1. $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$.
2. $a(x_1, x_2, \dots) = (ax_1, ax_2, \dots)$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

Mostre que $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução: Verificaremos três dos oito axiomas e os demais seguem de modo similar.

1. Elemento neutro: O elemento neutro $0 = (0_1, 0_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ deve ser tal que para qualquer $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ deve valer que:

$$\begin{aligned}(0_1, 0_2, \dots) + (x_1, x_2, \dots) &= (0_1 + x_1, 0_2 + x_2, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots)\end{aligned}$$

   Isso implica que $0_i + x_i = x_i$ para todo i. Como x é arbitrário, o elemento neutro deve ter todas as entradas nulas, ou seja, $0_i = 0$ para todo i. Isso mostra que 0 é o elemento neutro de $\mathbb{R}^\infty$.

2. Associatividade: Dados $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots), (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, temos que:

$$\begin{aligned}((x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots)) + (z_1, z_2, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) + (z_1, z_2, \dots)\\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, x_2 + (y_2 + z_2), \dots)\\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots)\\ &= (x_1, x_2, \dots) + ((y_1, y_2, \dots) + (z_1, z_2, \dots))\end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue da propriedade associativa dos números reais: $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$ para todo i.

3. Distributiva: Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, temos que:

$$\begin{aligned}\lambda\left((x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots)\right) &= \lambda\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots\right)\\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \dots))\\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots)\\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots)\\ &= \lambda(x_1, x_2, \dots) + \lambda(y_1, y_2, \dots)\end{aligned}$$

Visto que pela propriedade distributiva dos reais, vale que $\lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$ para todo i.

■

Comentários. É importante ter atenção sobre a notação, principalmente porque os vetores considerados possuem um número infinito de entradas. Por outro lado, as verificações são similares àquelas que fizemos para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e são sempre baseadas nas propriedades básicas de $\mathbb{R}$.

Questão 3. Seja V um espaço vetorial.

a) Aplicando os axiomas de espaço vetorial, mostre que se $v + w = u + w$, então $v = u$.

b) Para qualquer $v \in V$, $-(-v) = v$.

Observação: Lembre-se que para qualquer $v \in V$, o seu inverso aditivo é único e denotado por $-v$.

Solução: Para o item a), seja $-w$ o inverso aditivo de w, isto é, o único elemento de V tal que $w + (-w) = 0$. Para simplificar a igualdade, somaremos $-w$ ao vetor $v + w$ que é igual ao vetor $u + w$. Temos então que:

$$\begin{gathered}(v + w) + (-w) = (u + w) + (-w)\\ v + (w + (-w)) = u + (w + (-w))\\ v + 0 = u + 0\\ v = u\end{gathered}$$

A segunda igualdade é consequência da associatividade, a terceira, do fato de $-w$ ser o inverso aditivo de w e a última, da propriedade do elemento neutro $0 \in V$ com relação à adição.

Para o item b), as seguintes igualdades seguem da definição de $-v$ e de $-(-v)$:

$$\begin{gathered}v + (-v) = 0\\ (-v) + (-(-v)) = 0\end{gathered}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 &= v + (-v) \\
&= (-v) + v \\
&= (-v) + (-(-v))
\end{aligned}
$$

logo, $v + (-v) = 0 = (-v) + (-(-v))$ e então pelo item a), concluímos que $v = (-(-v))$.

Uma solução alternativa é a seguinte. O elemento $(-(-v))$ é o inverso aditivo do inverso aditivo de v e, portanto, deve ser único. Em outras palavras, é a (única) solução da equação $x + (-v) = 0$. Mas por definição $x = v$ é uma solução e e segue que $x = v = (-(-v))$.

■

Comentários.

- O argumento principal para o item a) é "somar"o inverso aditivo $-w$ em ambos os lados, mas como estamos em um conjunto abstrato, cada passo deve ser devidamente justificado pelos axiomas de espaço vetorial.
- No item b), pode-se aplicar a Proposição 1.8 da apostila, mas é importante que as soluções baseadas neste resultado façam menção ao mesmo. Note, no entanto, que a solução apresentada aqui é mais direta.