$2^{\underline{a}}$ Lista de Álgebra Linear - MAT 3211
Bacharelado em Atuariais - $1^{\underline{o}}$ semestre de 2023

1. Verifique se os seguintes conjuntos de $P_3(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

   a) $\{1, x+2, x^2-x, x^3, x^3-x\}$

   b) $\{1, x+2, x^2+x, x^3\}$

2. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio

   $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios p_1, p_2 e p_3, onde $p_1(t) = b(t+1)$, $p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

3. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $S_1 = [(1,0,-1),(0,1,1)]$ e $S_2 = [(1,1,1),(1,0,0)]$.

   a) Determine $S_1 \cap S_2$.

   b) Ache uma base e a dimesão de $S_1 \cap S_2$.

4. Em $M_3(\mathbb{R})$ sejam S_1 o conjunto das matrizes simétricas $(A = A^t)$ e S_2 o conjunto das matrizes anti-simétricas $(A = -A^t)$.

   a) Mostre que S_1 e S_2 são subespaços.

   b) Determine uma base de cada subespaço S_1 e S_2. Qual é a dimensão de cada um?

5. Determine a condição para x, y e z de modo que (x,y,z) seja combinação linear dos vetores (1,-3,2) e (2,4,-1).

6. Determine as coordenadas de $x = (1,0,0)$ em relação à base

   $\beta = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

7. Os subespaços S_1 e S_2 de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ são dados por

   $$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \\ c & a \end{bmatrix} \;:\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   $$S_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \right]$$

   Ache uma base e a dimensão dos subespaços S_1, S_2, $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   Seja $S : \{X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \;:\; AX = 4X\}$

   a) Mostre que S é um subespaço de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

   b) Determine uma base e a dimensão de S.

   c) Complete a base encontrada em (b) a uma base de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

9. Em $\mathbb{R}^5$, considere o subespaço $S = [A]$, onde
   $A = \{(1,0,-1,2,0)\ ,\ (2,1,3,0,0)\ ,\ (0,1,-5,4,0)\ ,\ (1,0,-11,10,0)\}$

a) Ache uma base B para S, contida em A.

b) Complete a base B do item (a) para uma base de $\mathbb{R}^5$.

c) Determine os valores de m para os quais $v \in S$, sendo $v = (4, -4, m^2, 4m, 0)$.

10. Sejam $A = \{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\}$ $S = [A]$ e $v = (0, m, -m, 1, 1)$.

    a) Determine uma base de S.

    b) Determine todos os valores de m para os quais temos $v \in S$.

    c) Se $w \notin S$, temos $[A \cup \{w\}] = \{(x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5, x = 0\}$?

    OBS: Justifique todas as suas afirmações.

11. Considere os sistemas lineares homogêneos:

$$\text{I)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} 2x + y + 2z + 2w = 0 \\ x - 2y + z + 6w = 0 \\ x + 3y - 5z + 8w = 0 \end{cases}$$

    a) Determine um conjunto de geradores e a dimesão do subespaço das soluções dos sistemas.

    b) Determine o posto dos sistemas.

12. Seja $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

    a) Mostre que B é L.I.

    b) Determine uma base de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ que contenha B.

13. Sejam $S_1 = \{f \in F(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$ e $S_2 = [x^3 - x,\ x^2 - 1,\ x - 1]$.

    a) Determine uma base e a dimesão de $S_1 \cap S_2$

    b) Seja $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$. Verifique se $p \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de p em relação à base encontrada em a).

14. Seja $T \in M_4(\mathbb{R})$ fixada e considere o conjunto $S = \{M \in M_{4\times 1}(\mathbb{R}) / T.M = 0\}$.

    a) Verifique que S é subespaço vetorial de $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

    b) No caso em que $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Ache uma base e a dimesão de S.

15. Seja $B = \{(1, 0, 0, 2, 0), (0, 0, -1, 0, 1), (2, 1, 0, -3, -5)\}$.

    a) Mostre que B é L.I.

    b) Determine uma base de $\mathbb{R}^5$ que contenha B.

16. Sejam $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M(\mathbb{R}) \mid x - y + z = 0 \right\}$

$$S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

a) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

b) Seja $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Verifique se $M \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, dê as coordenadas de M em relação à base encontrada em a).

17. Sejam $A = \{x^2 - 1,\ x + 1,\ x^2 + x\},\ S = [A]$ e $p(x) = mx^2 + nx + r$.

a) Determine uma base de S.

b) Determine todos os valores de m, n e r para os quais $p \in S$.

c) Se $p \notin S$, temos $[A \cup \{p\}] = P_2(\mathbb{R})$? Justifique todas as suas afirmações.