Aula 6

Espaços vetoriais finitamente gerados

Def. Dizemos que um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é finitamente gerado se possui um conjunto gerador finito.

Exemplo. O espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ é finitamente gerado. Por outro lado, $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ não. De fato,

$[1] = \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Suponha agora que existe $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Então, existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^n$. Como $\mathbb{Q}^n$ é o produto cartesiano de conj. enumeráveis $\mathbb{Q}$ concluímos que $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e pela bijeção $\mathbb{R}$ é enumerável $\lightning$. Logo $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ não é finitamente gerado.

Prop. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado e não nulo. Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ conjunto gerador de V. Então todo conjunto l.i. em V possui no máximo m elementos.

dem. Vamos mostrar que qq subconjunto $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ com $n > m$ é l.d. Note que para cada i existem α_{ij} tq.

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} v_j \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Seja $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$. Então

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} v_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{ji} \right) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j.$$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ l.i. implica $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$.

Assim temos um sistema linear homogêneo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \lambda_i = 0$ para $j = 1, \dots, m$. Como $n > m$

o nº de incógnitas é maior $\Longrightarrow$ o sistema possui solução não trivial λ_i's, e daí, $\{u_1, \dots, u_n\}$ é l.d. $\blacksquare$

Corolário. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo. Então duas bases quaisquer de V possuem o mesmo nº de elementos.

Def. Se V admite uma base finita, então chamamos de dimensão de V o nº de elementos de tal base. Veja que tal conceito está bem definido pelo corolário acima. Caso contrário, dizemos que V possui dimensão infinita.

$\dim_{\mathbb{K}} V$ denota a dimensão do espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$.

Exemplos:

(a) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

(b) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(\mathbb{K}) = \infty$

(c) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$, em geral, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

(d) $\dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$

(e) $\dim_{\mathbb{K}} C_0 = \infty$.

Corolário. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n \geq 1$. Seja $\mathcal{B} \subset V$ um subconjunto com n elementos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base.

(b) $\mathcal{B}$ é l.i.

(c) $\mathcal{B}$ é conjunto gerador de V.

Prop. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ l.i.. Se existir $v \in V$ tal que $v \notin [\mathcal{B}]$, então $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ também é l.i..

dem. Suponha $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = 0$. Se $\alpha_{n+1} = 0$ temos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \rightsquigarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ que nos dá $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ l.i.. Por outro lado, se $\alpha_{n+1} \neq 0$,

$$v = \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} v_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} v_n \rightsquigarrow v \in [\mathcal{B}] \ \text{↯}$$

Logo, $\alpha_{n+1} = 0$ e $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é l.i. ∎

Teo. Todo $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado V possui uma base.

dem. Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ conjunto gerador de V e seja $v_1 \in V$ um vetor não nulo. Considere $[v_1]$. Se $[v_1] = V$, $\{v_1\}$ é base de V e a prova está concluída. Caso contrário, $\exists\, v_2 \neq 0$ em V tal que $v_2 \notin [v_1]$. Logo $\{v_1, v_2\}$ é l.i. Se $[v_1, v_2] = V$ a prova está completa, senão, $\exists\, v_3 \neq 0$ em V tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.i. Note que podemos proceder desta forma no máximo m vezes o que implica na existência de $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V com $n \leq m$. ∎

Corolário: Seja $\mathcal{B} \subset V$ l.i. Se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado, então existe base de V contendo $\mathcal{B}$. **dem.** Basta proceder como na prova do teo. anterior. ∎

Corolário: Seja V $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base de V.

(b) Cada $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

dem. (a) $\rightsquigarrow$ (b). Sejam $v \in V$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Sejam $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$.

Então $0 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i$. Como $\mathcal{B}$ é base, $\mathcal{B}$ é l.i. $\rightsquigarrow$ $\alpha_i - \beta_i = 0$ $\forall i$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i$.

(b) $\rightsquigarrow$ (a). $0 \in V$ e portanto é escrito de maneira única em termos de $\mathcal{B}$. Como $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 . v_i$

segue que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \rightsquigarrow \alpha_i = 0$ $\forall i$.

$\blacksquare$

A partir de agora vamos trabalhar com <u>base ordenada</u>.

Vamos fixar uma ordem sobre as bases de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais finitamente gerados. Desta forma, se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base ordenada de V, para cada $v \in V$, existem únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.q. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Assim, podemos escrever de maneira única, cada $v \in V$, da forma $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Nesse caso dizemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ são as coordenadas de v na base $\mathcal{B}$.

<u>Exemplo</u>. Verifique que $\mathcal{B}$ é base de V e calcule as coordenadas do vetor v na base $\mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. $v = (0,1)$.

(b) $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. $v = (1,1,1)$.

(c) $\mathcal{B} = \{(1,i), (i,0)\} \subset \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$. $v = (i, 2+i)$.

Exercícios. seção 2.3.14: 1, 2, 3, 5, 6.