MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 3

1. Funções de Duas Variáveis: Gráficos e Curvas de Nível

1. Determine e esboce o *domínio* de cada função a seguir.

a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$ b) $f(x,y)=\arctan(y/x)$ c) $f(x,y)=(x^2+y^2-1)^{-1/2}$
d) $f(x,y)=\tan(x-y)$ e) $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$ f) $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$

2. Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ b) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ c) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ d) $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$

3. Determine e parametrize:

a) A curva de nível $c=-2$ da função $f(x,y)=x+2y-3$.
b) A curva de nível $c=5$ da função $f(x,y)=x-\sqrt{1-2y^2}$.
c) A curva de nível $c=1$ da função $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

4. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=1-x-y$ b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$ c) $f(x,y)=4x^2+y^2$
d) $f(x,y)=y^2+1$ e) $f(x,y)=y^2+x$ f) $f(x,y)=xy$
g) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ h) $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ i) $f(x,y)=(x-y)^2$
j) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$ k) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$ l) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$
m) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ n) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ o) $f(x,y)=\sqrt{y-2x^2-1}$

5. Seja $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$.

a) Esboce a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.
b) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2y^2-2y-y^2+4$. A imagem de γ está contida em alguma curva de nível de f? Em caso afirmativo, em qual nível?

6. Considere a curva $\gamma:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t)=(\sin t,\sec^2 t-1)$. É correto afirmar que a imagem de γ está contida na curva de nível:

a) $c=0$ da função $f(x,y)=y(1-x^2)$.
b) $c=-1$ da função $f(x,y)=(y+1)(x^2-1)$.
c) $c=2$ da função $f(x,y)=(y+1)(x^2-1)$.
d) $c=0$ da função $f(x,y)=y(1-x^2)+x^2$.
e) $c=-1$ da função $f(x,y)=(y+1)(1-x^2)$.

7. Sejam $\gamma:[0,\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ e $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dadas por

$$\gamma(t)=(2-\cos t,\sec^2 t+3) \quad \text{e} \quad f(x,y)=\sqrt[3]{(x-2)^4(y-3)^2}+1.$$

Esboce a trajetória de γ e mostre que sua imagem está contida em uma curva de nível de f, indicando o nível.

8. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

a) Esboce as curvas de nível $c=1$, $c=2$ e $c=3$ de f.

b) Encontre uma curva derivável α, definida num intervalo $I_1\subset\mathbb{R}$, cuja imagem seja a curva de nível $c=1$ de f. Escreva a equação da reta tangente à imagem de α no ponto $(-1,0)$.

c) Encontre uma curva derivável β, definida num intervalo $I_2\subset\mathbb{R}$, cuja imagem seja o trecho da curva de nível $c=2$ de f que contém o ponto $(3,1)$. Escreva a equação da reta tangente à imagem de β nesse ponto.

d) Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo $I_3\subset\mathbb{R}$, cuja imagem seja o trecho da curva de nível $c=3$ de f que contém o ponto $(\sqrt{3},\sqrt{6})$. Escreva a equação da reta tangente à imagem de γ nesse ponto.

2. Limite e Continuidade

1. Calcule, se existirem, os seguintes limites, justificando todas as passagens:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3-y}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+4y^2)$

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$

r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)$

s) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2+x^3\sqrt[5]{y^6}}{\sqrt{x^4+y^8}}$

t) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x+y}$

u) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{x^2y^8}{x^4+y^8}\right)$

v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\arctan\left(\frac{x^4-2y}{x^4+y^3}\right)$

w) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right)$

x) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^x-e^y}{\sin x-\sin y}$

2. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^4+y^2}\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ L, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Existe algum número real L que torna f contínua em $(0,0)$? Justifique.

3. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Existe algum número real L que torna f contínua em $(0,0)$? Justifique.

4. Determine os pontos em que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1, \text{ se } (x,y) = (0,0), \\ 0, \text{ se } (x,y) = (1,1), \end{cases}$$

é contínua.

5. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$.

(a) Determine e esboce, em um mesmo sistema de coordenadas, o domínio de f e as curvas de nível $c = 1$ e $c = 3$ de f.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ existe? Justifique.

6. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y-x}$.

(a) Determine e esboce, em um mesmo sistema de coordenadas, o domínio de f e as curvas de nível $c = 2$ e $c = -2$ de f.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe? Justifique.