

# EXERCÍCIO 1 DA SEGUNDA LISTA DE ÁLGEBRA LINEAR I

DENIS DE ASSIS PINTO GARCIA

31 DE AGOSTO DE 2023

**QUESTÃO 1.** Em cada item, exiba exemplos de matrizes  $A$  e  $B$  tais que:

- (a)  $AB \neq BA$ ;
- (b)  $AB = BA$ ;
- (c)  $AB$  está definida, porém  $BA$  não;
- (d)  $A \neq I_n$ ,  $B \neq I_n$ , e  $AB = I_n$ ;
- (e)  $AB = I_n$ , porém  $BA \neq I_n$ ;
- (f)  $A \neq B$ , e  $A^2 = B^2$ .

**RESOLUÇÃO.**

- (a) Se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , e se  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , mas  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (b) Se  $A$  e  $B$  em  $M_n(\mathbb{R})$  são tais que  $A = B$ , então, em particular,  $AB = BA$ .
- (c) Se  $m$ ,  $n$  e  $p$  em  $\mathbb{N}^*$  são tais que  $m \neq p$ , então, para quaisquer  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $AB$  está definida, mas  $BA$  não está.
- (d) Se  $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , então  $A \neq I_2$ ,  $B \neq I_2$ , e  $AB = I_2$ .
- (e) Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , e se  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , então  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , mas  $BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (f) Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é tal que  $A \neq 0_n$ , e se  $B = -A$ , então  $A \neq B$ , mas  $A^2 = B^2$ . Da mesma forma, se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , e se  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , então  $A \neq B$ , mas  $A^2 = B^2$ .