Exercício :

Um feixe de luz homogêneo de comprimento de onda $\lambda = 3000\,\text{Å}$ e intensidade $I = 5 \times 10^{-2}\ W\ m^{-2}$ atinge uma superfície de sódio, cuja função trabalho é $W_0 = 2{,}3\ eV$.

Calcule:

(a) o número médio de elétrons emitidos por m^2 e por segundo assumindo que cada fóton que atinge a superfície ejeta um elétron.

(b) a energia cinética máxima dos fotoelétrons.

——— // ———

(a)
De acordo com a teoria de Einstein, o feixe de luz incidente é formado de fótons com energia $h\nu$. Portanto, se N_γ é o número de fótons por unidade de área e por unidade de tempo no feixe, sua intensidade pode ser escrita como

$$I = N_\gamma h\nu = \frac{N_\gamma h c}{\lambda} \Rightarrow N_\gamma = \frac{\lambda I}{hc}$$

Assumindo que cada fóton ejeta um elétron, temos imediatamente, que o número N_e de elétrons ejetados por unidade de área e de tempo é

$$N_e = N_\gamma = \frac{\lambda I}{hc} = \frac{(3\times10^{-7}\,m)(5\times10^{-2}\,W\,m^{-2})}{(6{,}63\times10^{-34}\,J\,s)(3\times10^{8}\,m\,s^{-1})}$$

Portanto

$$\boxed{N_e = 7{,}54\times10^{16}\ \text{fótons}\ m^{-2}\,s^{-1}}$$

(b) Da teoria do efeito fotoelétrico, vimos que a energia cinética máxima dos elétrons é dada por

$$K_{max} = h\nu - w_0 = \frac{hc}{\lambda} - w_0,$$

ou seja, é a ~~energia~~ diferença entre a energia de um fóton individual do fluxo incidente ($h\nu$) e a função trabalho do material da superfície (w_0).

Cada fóton do fluxo em questão tem energia

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\times10^{-34}\,J\,s)(3\times10^{8}\,m\,s^{-1})}{3\times10^{-7}\,m}$$
$$= 6{,}63\times10^{-19}\,J$$

Em termos de unidades mais apropriadas para o problema

$$E_\gamma = \frac{6,63 \times 10^{-19}\ J}{1,6 \times 10^{-19}\ J/eV} = 4,14\ eV$$

Portanto

$$K_{max} = E_\gamma - w_0 = (4,14 - 2,3)\ eV$$

$$\boxed{K_{max} = 1,84\ eV}$$

Um experimento de efeito fotoelétrico feito nas condições acima apresentaria um potencial limite V_0 tal que

$$K_{max} = eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{K_{max}}{e} = \frac{2,95 \times 10^{-19}\ J}{1,6 \times 10^{-19}\ C}$$

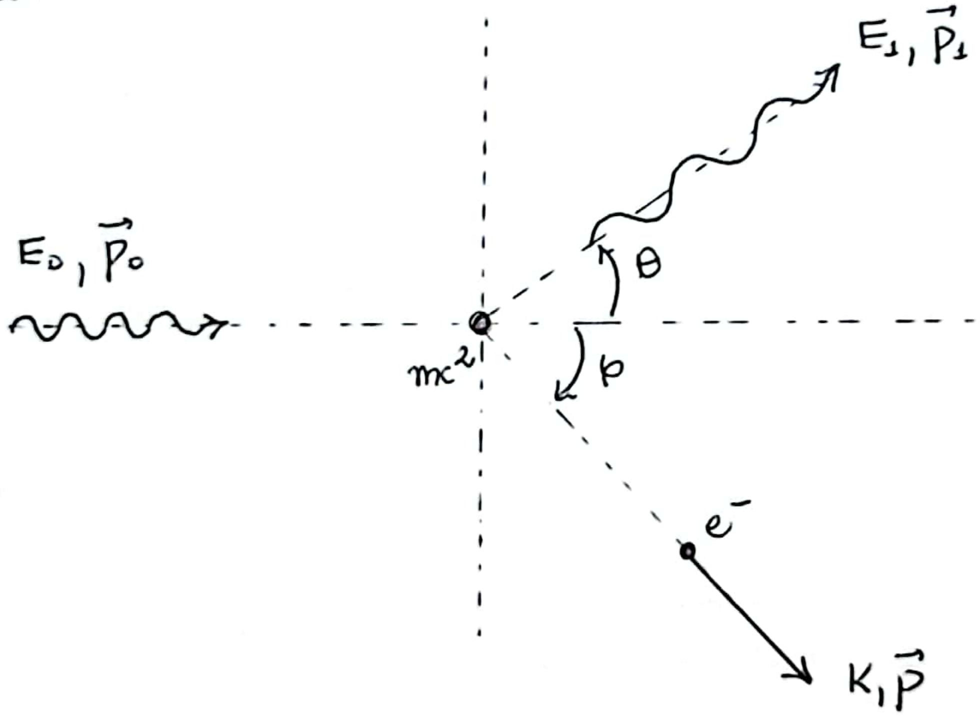
$$\boxed{V_0 = 1,84\ V}$$

Exercício:

Determine a máxima energia cinética possível de um elétron Compton espalhado em termos da energia do foton incidente e da energia de repouso do elétron.

——— // ———

Solução:



Vimos que conservação do momento linear e energia relativísticos para o espalhamento acima leva à seguinte relação entre o comprimento de onda λ_1 do foton espalhado e o comprimento de onda λ_0 do foton incidente

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta)$$

Em particular, conservação de energia implica

$$E_0 + \cancel{mc^2} = E_1 + K + \cancel{mc^2}$$

$$\Downarrow$$

$$K = E_0 - E_1 = (p_0 - p_1)c$$

Portanto, para uma energia fixa E_0 do foton incidente, o máximo valor de K ocorre quando a energia do foton espalhado é mínima:

$$K_{max} = E_0 - E_{1\,min}$$

Temos que

$$E_1 = p_1 c = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_0 + \lambda_c(1-\cos\theta)}$$

Então

$$E_1^{min} = E_1(\theta = \pi) = \frac{hc}{\lambda_0 + 2\lambda_c}$$

$$\Downarrow$$

$$K_{max} = E_0 - E_1^{min} = E_0 - \frac{hc}{\lambda_0 + 2\lambda_c}$$

Logo

$$K_{max} = E_0 - \frac{hc/\lambda_0}{1 + 2\lambda_0/\lambda_0} = E_0 - \frac{E_0}{1 + 2\frac{hc}{\lambda_0}\frac{1}{mc^2}}$$

$$= E_0\left(1 - \frac{1}{1 + 2\left(E_0/mc^2\right)}\right)$$

Definindo

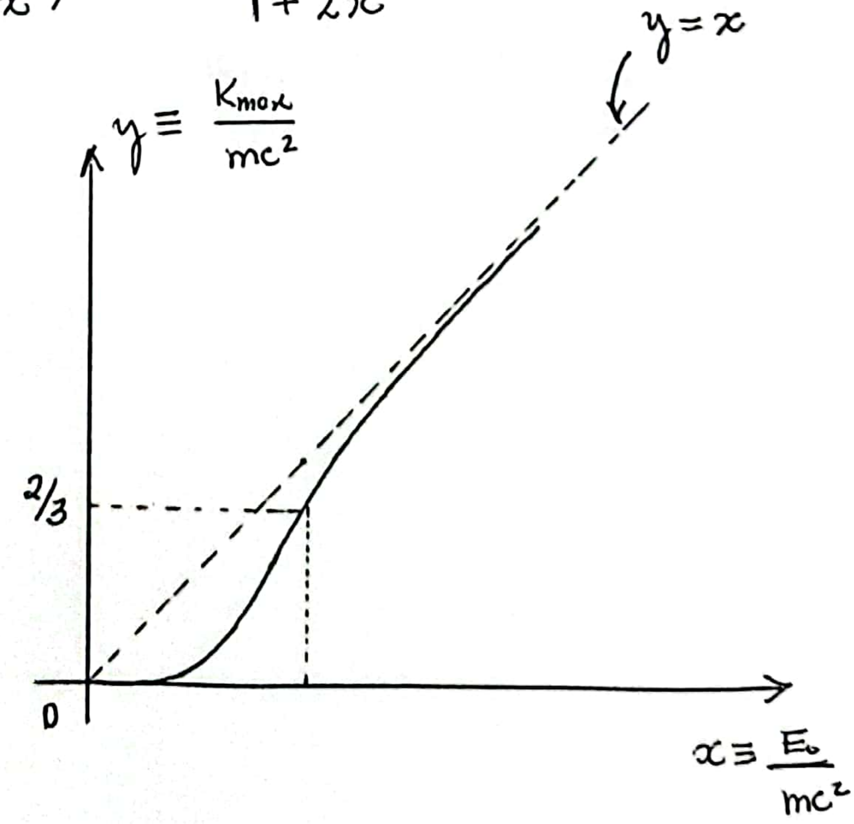
$$y \equiv \frac{K_{max}}{mc^2} \quad e \quad x \equiv \frac{E_0}{mc^2}$$

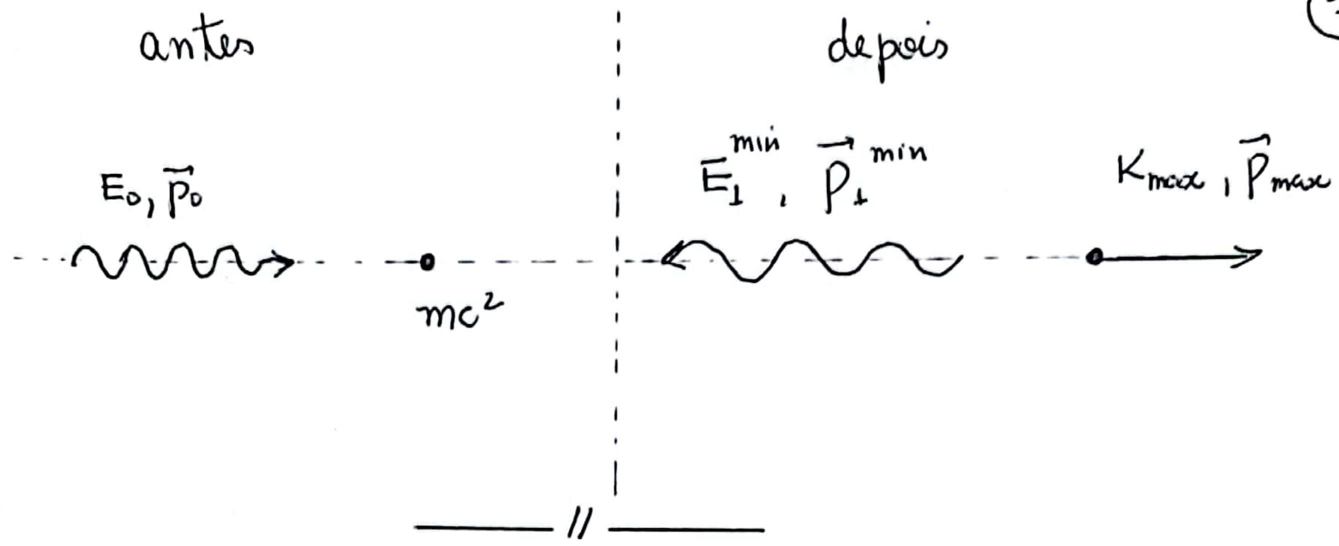
temos

$$y = x\left(1 - \frac{1}{1+2x}\right) = \frac{2x^2}{1+2x}$$

Logo

$$\begin{cases} y\,(x \ll 1) \simeq 2x^2 \\ y\,(x \gg 1) \simeq x \end{cases}$$





Alguns valores :

$$E_1^{min} = \frac{E_0}{1 + 2\,E_0/mc^2}$$

$$K_{max} = E_0 - E_1^{min}$$

$$E_1^{min}(E_0 = mc^2) = \frac{mc^2}{3}$$

$$K_{max} = \frac{2}{3}\,mc^2$$

$$E_1^{min}(E_0 \gg mc^2) = \frac{mc^2}{2}$$

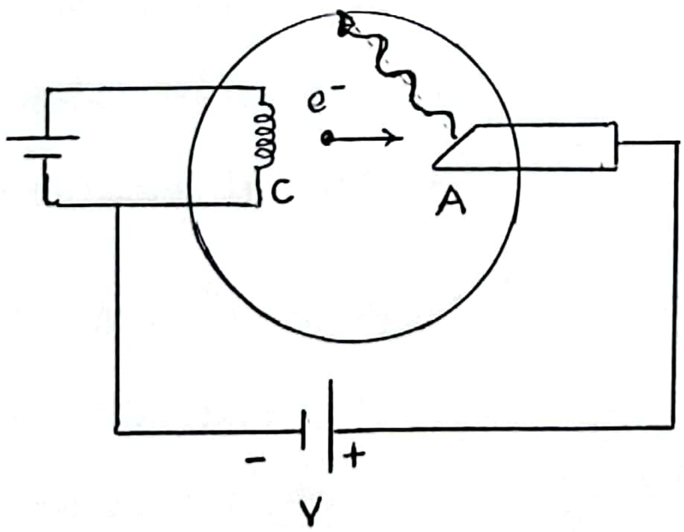
$$K_{max} = E_0 - \frac{mc^2}{2}$$

Produção de raios-X e física quântica

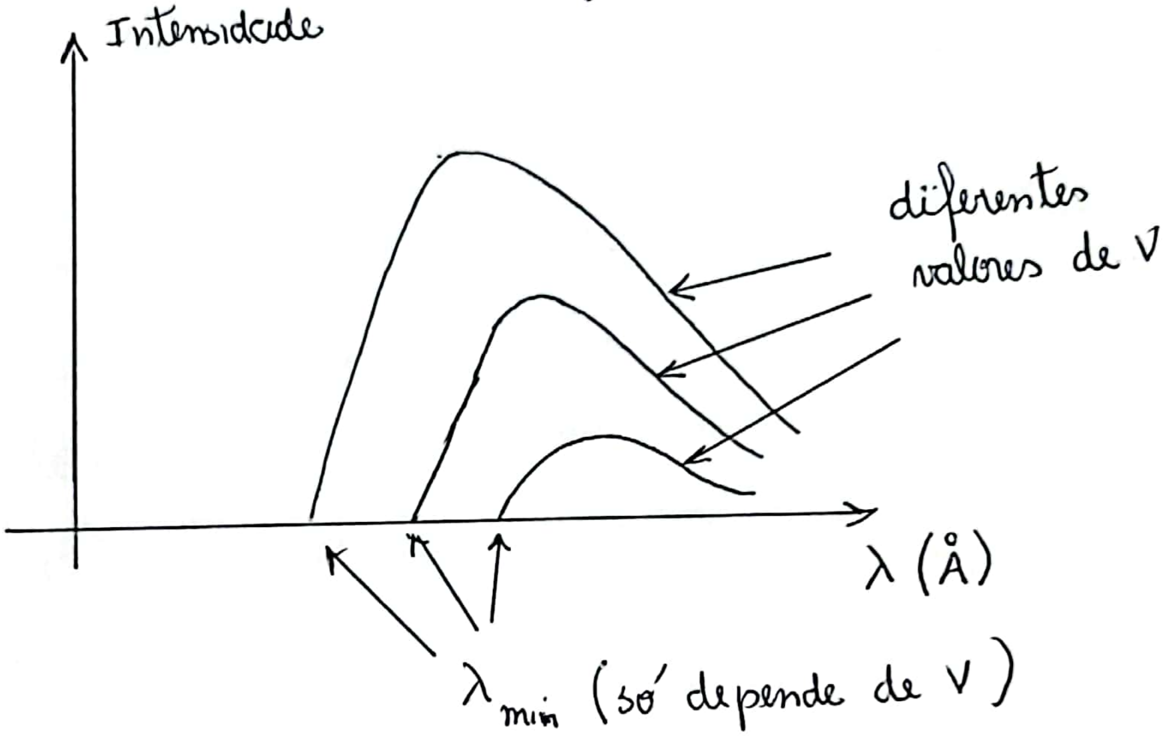
Os raios-X foram descobertos por Roentgen em 1895, o que lhe valeu o Prêmio Nobel em 1901. Raios-X são ondas eletromagnéticas e, portanto, possuem propriedades como polarização, assim como podem sofrer interferência e difração.

Raios-X podem ser produzidos por meio da desaceleração de um feixe de elétrons

Tubo de raios-X



A distribuição de comprimentos de onda emitidos pelo tubo de raios-X tem o seguinte aspecto



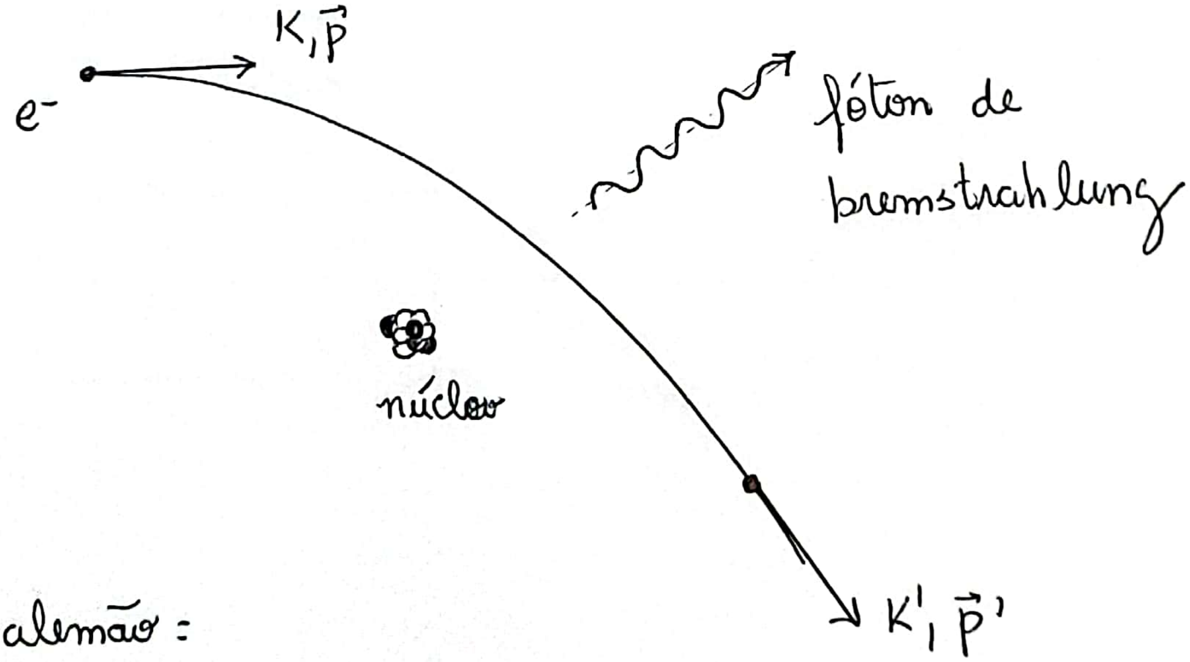
A forma das curvas acima dependem da tensão de aceleração V aplicada entre o cátodo e o ânodo e, em menor grau, do material do ânodo.

Entretanto, o valor mínimo λ_{min} dos comprimentos de onda emitidos pelo tubo só depende de V. A simples existência de um valor mínimo de λ já põe a teoria clássica de emissão de radiação numa posição muito delicada. Na teoria eletromagnética clássica, a intensidade de uma onda está associada à sua amplitude e não ao comprimento.

Portanto, classicamente, espera-se que o tubo de raios-X emita em todos os possíveis comprimentos de onda de $\lambda = 0$ até comprimentos arbitrariamente grandes.

Já do ponto de vista quântico, em que o campo eletromagnético é formado por fótons, a existência de λ_{min} é natural. Nesse caso, ao serem desacelerados pelo campo Coulombiano dos núcleos atômicos do material do ânodo, a energia perdida pelos elétrons individuais é emitida na forma de fótons.

Interação Coulombiana entre e^- e núcleo atômico com emissão de fótons



Em alemão:

$\underbrace{\text{brems}}_{\text{desaceleração, frenamento}} \quad \underbrace{\text{strahlung}}_{\text{radiação}}$

A energia cinética típica dos elétrons no tubo de raios-X está na faixa de KeV, ou seja, muito menor que a energia de repouso dos núcleos atômicos. Nessas condições podemos desprezar a energia de recuo do núcleo atômico. Portanto, a energia do fóton emitido deve satisfazer

$$h\nu = K - K'$$

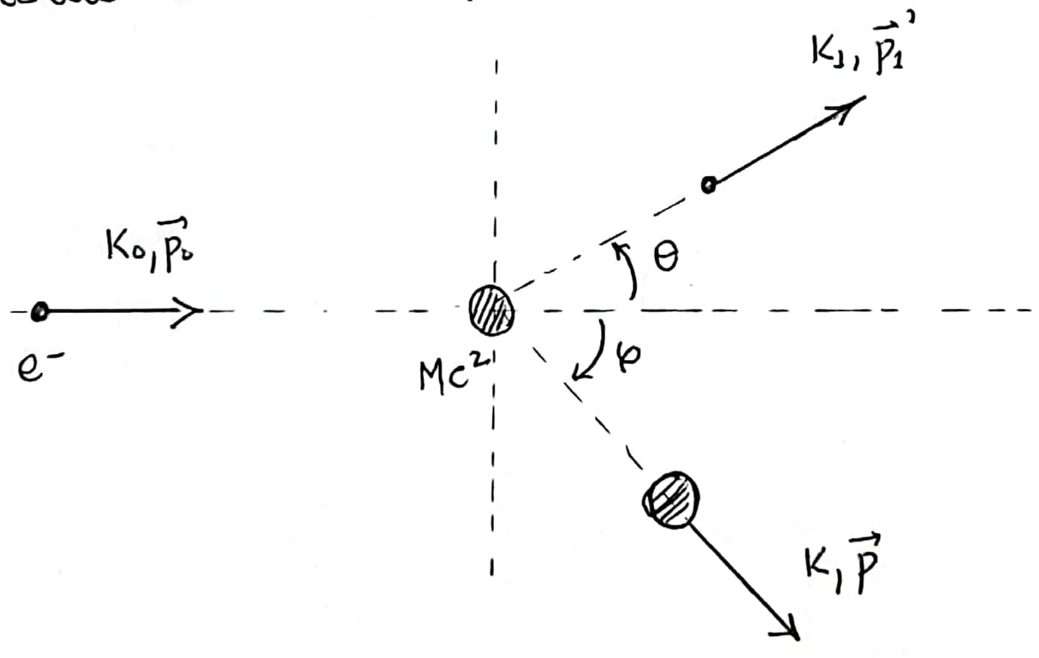
Nessas condições, o fóton mais energético emitido é aquele em que o elétron vai ao repouso ($K'=0$) após a interação com um único núcleo atômico

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = K = eV$$

Logo $\boxed{\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}} \xrightarrow[\text{limite clássico}]{h \to 0} 0$

Vamos demonstrar que num espalhamento elétron-núcleo onde as energias dos elétrons incidente e espalhados são muito menores que a energia de repouso do núcleo, a energia de recuo do núcleo pode ser desprezada.

Esqueça por um momento a presença do foton de bremstrahlung, pois a presença dele não altera nossas conclusões. Ou seja, nosso problema será um espalhamento relativístico de dois corpos



Conservação de momento linear implica

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos\theta + p\cos\varphi \\ p_1 \sin\theta = p \sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta + p_1^2 = p^2$$

Conservação de energia implica

$$\cancel{mc}^2 + K_0 + \cancel{Mc^2} = \cancel{mc}^2 + K_1 + \cancel{Mc^2} + K$$

Logo

$$K = K_0 - K_1 \quad \text{com} \quad p^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2MK$$

Então, temos que

$$p_0^2 - 2p_0p_1\cos\theta + p_1^2 = \frac{1}{c^2}(K_0 - K_1)^2 + 2M(K_0 - K_1)$$

$$p_0^2c^2 - 2p_0p_1c^2\cos\theta + p_1^2c^2 = (K_0 - K_1)^2 + 2Mc^2(K_0 - K_1)$$

Dividindo por $(Mc^2)^2$ ambos os lados

$$\frac{p_0^2c^2}{M^2c^4} - 2\left(\frac{p_0c}{Mc^2}\right)\left(\frac{p_1c}{Mc^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{p_1^2c^2}{M^2c^4}\right)$$

$$= \left(\frac{K_0}{Mc^2} - \frac{K_1}{Mc^2}\right)^2 + 2\left(\frac{K_0}{Mc^2} - \frac{K_1}{Mc^2}\right)$$

Ambos os lados dessa equação possuem termos de $\mathcal{O}(x^2)$ onde $x = \frac{\text{energia}}{Mc^2} \ll 1$ e termo de ordem $\mathcal{O}(x)$ do lado direito.

Portanto, até ordem x podemos dizer que

$$2\left(\frac{K_0}{Mc^2} - \frac{K_1}{Mc^2}\right) \simeq 0 \implies K_0 \simeq K_1$$

Ou seja, o espalhamento se dá como se o núcleo atômico estivesse parado.