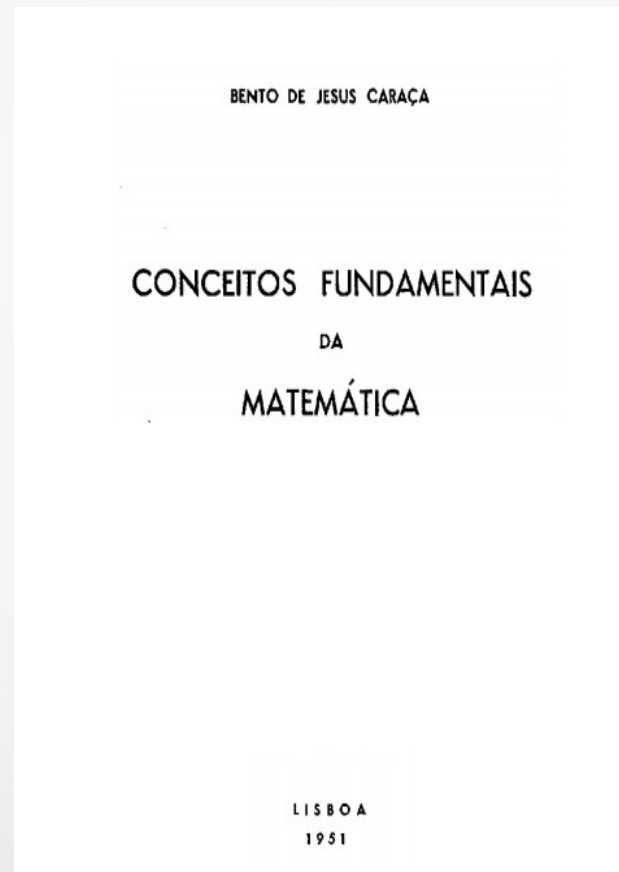


MAT 1514 - Números Reais

Aula baseada no livro



Números Reais

Números Naturais – Contagem

Números Racionais – Medida

Números Irracionais –

Propriedades Numéricas e Geométricas

Compatibilidade Lógica

Números Reais

Compreender os números reais depende de estabelecer uma relação biunívoca entre números e pontos em uma reta.

Reta orientada com origem.

A noção de infinito

Sucessão dos números naturais

1, 2, 3, 4, ...

O que querem dizer estes três pontos?

“Naquela sucessão eu passo de um número para outro, juntando-lhe uma unidade, e vou tão longe quanto quiser.”

A noção de infinito

Há uma infinidade de números naturais.

Existem outros conjuntos infinitos?

Conjunto de pontos de uma reta.

Será possível comparar estes diferentes tipos de infinito?

A noção de infinito

Conjunto dos números naturais: tipo enumerável

Pontos de uma reta: tipo do contínuo, ou não
enumerável

Os dois tipos são realmente distintos, do ponto de
vista de correspondência biunívoca, ou não?

A noção de infinito

Conjunto de pontos de uma reta é um conjunto infinito.

Conjunto de pontos de uma reta tem a mesma quantidade que o conjunto dos números naturais?

Quantidade de números pares =
Quantidade de números naturais

A noção de infinito

Números Racionais

1º grupo – Soma 2 – ($1/1$)

2º grupo – Soma 3 – ($1/2$, $2/1$)

3º grupo – Soma 4 – ($1/3$, $2/2$, $3/1$)

4º grupo – Soma 5 – ($1/4$, $2/3$, $3/2$, $4/1$)

Conseguimos enumerar os números racionais

A noção de infinito

Pontos de uma reta não podem ser enumerados.

Características dos Conjuntos

- Operações;
 - Ordem;
 - Densidade;
- Enumerabilidade;
 - Continuidade.

O problema da continuidade

O problema da continuidade é o dos mais importantes da ciência e dos que mais têm sido estudados e debatidos em todos os tempos.

Continuidade: variação que se faz por gradações insensíveis.

Exemplo: movimento de um automóvel sobre uma estrada. Conjunto de pontos de uma reta.

O problema da continuidade

Entender como é feita a distribuição dos pontos da reta.

O que é um número real?

Como os racionais e os irracionais se distribuem na reta?

Descrever os números reais de modo mais meticuloso e detalhado.

Construção dos Reais

Linha reta: imagem ideal da continuidade

Richard Dedekind 1872

Cortes de Dedekind

Construção dos Reais

- Exemplo de um corte :
A: todos os números racionais menores ou iguais a 5.
B: todos os números racionais maiores ou iguais a 5.
1) 5 é um número racional que separa as duas classes;
2) qualquer número racional estará em alguma das partes;
3) todo número racional em A é menor que todo número racional em B.

Construção dos Reais

Todo corte em $\mathbb{Q}$ provém de um número racional?

A : todo número racional $x < 0$ ou se for positivo, tal que $x^2 < 2$.

B : todo número racional x tal que $x^2 \geq 2$

Há um corte, mas não há elemento de separação!

$\mathbb{Q}$ não é contínuo.

Construção dos Reais

Axioma ou Postulado de Dedekind-Cantor:

“Todo corte da reta é produzido por um (e só um) ponto da reta”

O conjunto $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma da continuidade de Dedekind-Cantor.

Chamamos de **número real** ao elemento de separação de duas classes num corte qualquer na reta.

Se existe um número racional a separar as duas classes, tal número real coincidirá com o **racional**. Se não existe tal número, o número real será chamado de **irracional**.