

Lista I: Teoria de conjuntos, introdução a teoria de probabilidades, e probabilidade condicional

Thomas Peron

Data de publicação: 30/08/2023. Data da prova: 19/09/2023.

1. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Utilize a lei da probabilidade total para verificar a seguinte equação:

$$\Pr\{A\} = \Pr\{A \cap B\} + \Pr\{A \cap B^c\}, \quad (1)$$

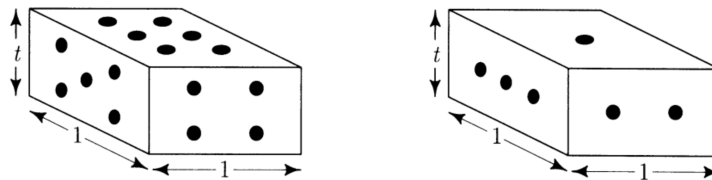
onde B^c é o conjunto complementar de B (isto é, o evento B^c ocorre se, e somente se, B não ocorrer).

2. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Derive a lei

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}. \quad (2)$$

Dica: Use o resultado do exercício anterior para calcular $\Pr\{A \cap B^c\} = \Pr\{A\} - \Pr\{A \cap B\}$. Em seguida, aplique a lei de adição [axioma (ii) da Sec. II-3 das notas de aula] aos eventos disjuntos $A \cap B$ e $A \cap B^c$, tendo em mente que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

3. Mostre que, se A e B são eventos independentes, A^c e B , B e A^c , e A^c e B^c também serão.
4. Um dado de seis lados possui dimensões como ilustrado na figura abaixo:



As faces 1 e 6 são quadradas, e seus lados medem 1 unidade, mas a distância entre as faces, ou a espessura do dado, mede $t \leq 1$. Portanto, as faces de número 2, 3, 4, e 5 são retângulos em vez de um quadrado. É evidente que, conforme t decresce de 1 a 0, a chance de uma face quadrada sair para cima aumenta de $1/3$ para 1. Imagine que a espessura t do dado acima seja tal que a probabilidade de sair uma face quadrada num lançamento seja $1/2$ (você pode entender essa probabilidade como sendo a frequência relativa numa série de lançamentos). Qual a probabilidade de que o resultado de um lançamento com o dado acima seja maior ou igual a 3? (Resp.: $5/8$).

5. Considere que numa urna haja fichas e que cada uma delas é marcada com número de $i = 1$ a 6. Considere ainda que a proporção da ocorrência de cada número é dada pela seguinte tabela:

número i	1	2	3	4	5	6
proporção $P(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Suponha agora que um número i seja obtido da caixa de fichas e um outro número j seja o registro do lançamento do dado do Exercício 4. Qual a probabilidade de que i e j sejam diferentes? (Resp.: $13/16$).

6. Escreva, em notação de conjuntos, o evento equivalente às seguintes afirmações:

- O evento que ocorre se apenas um dos eventos A ou B ocorrer.
- O evento que ocorre se nenhum dos eventos A , B ou C ocorrerem.
- Os eventos obtidos ao trocarmos a palavra “nenhum” em (b) por “apenas um”, “exatamente dois” e “três”.

7. Dois times, A e B , se enfrentam num jogo de futebol, e estamos interessados em saber quem será o vencedor. O espaço amostral é definido como $S = \{\alpha, \beta, \delta\}$, onde α representa o resultado de que A ganha; β o resultado de que B ganha; e δ temos empate. Suponha que sabemos que

- (i) a probabilidade de A ganhar seja $P(\alpha) = 0.5$;
- (ii) e que a probabilidade de um empate seja $P(\delta) = 0.25$.

Encontre:

- (a) A probabilidade de B ganhar. (Resp.: 0.25)
 - (b) A probabilidade de B ganhar ou a de um empate ocorrer. (Resp.: 0.5)
8. São retiradas uma a uma, aleatoriamente, bolas de uma urna até que a primeira bola branca seja obtida. No entanto, a cada tentativa, dobra-se a quantidade de bolas azuis colocadas na urna. Sabendo que a urna contém 4 bolas azuis e 6 brancas, calcule a probabilidade de obter a primeira bola branca no máximo na terceira tentativa. Assuma que as retiradas são feitas com reposição. (Resp.: 0.83)
9. Sejam A e B dois eventos tais que

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.9.$$

Calcule:

- (a) $P(A \cap B)$. (Resp.: 0.2)
 - (b) $P(A^c \cap B)$. (Resp.: 0.5)
 - (c) $P(A^c \cup B)$. (Resp.: 0.8)
 - (d) $P(A \cap (B \cup A^c))$. (Resp.: 0.2)
10. Imagine que lançamos dois dados e que registramos dois números. Seja X_1 o resultado do primeiro lançamento e X_2 o resultado do segundo.
- (a) Calcule a probabilidade de que $X_2 = 4$. (Resp.: $\frac{1}{6}$)
 - (b) Calcule a probabilidade de que $X_1 + X_2 = 7$. (Resp.: $\frac{1}{6}$)
 - (c) Calcule a probabilidade de que $X_1 \neq 2$ e $X_2 \geq 4$. (Resp.: $\frac{5}{12}$)
11. Dois jogadores, A e B , se alternam numa máquina de jogos até que um deles obtenha um sucesso; o primeiro a fazê-lo é considerado vencedor. A probabilidade de sucesso do jogador A é p , enquanto a de B é q . Considere que jogadas sucessivas são independentes.
- Determine a probabilidade de que A vença o jogo dado que A jogue primeiro. (Resp.: $p/[1 - (1 - p)(1 - q)]$.)
12. Uma maneira de criar um filtro de spam é por meio da análise da frequência de palavras num email, e isso se deve ao fato de que algumas palavras são mais frequentes em spams do que outras. Imagine que temos as seguintes informações:
- (i) 50% dos emails são spams.
 - (ii) 1% dos emails que contêm a palavra “bitcoin” são spams.
 - (iii) 0.001% dos emails que não são spams contêm a palavra “bitcoin”.
- Suponha que um email foi verificado e que uma ocorrência da palavra “bitcoin” foi detectada. Qual a probabilidade de que este email seja um spam? (Resp. ≈ 0.999)
13. Uma urna contém n moedas. Um total de f moedas não são viciadas, enquanto b são viciadas com probabilidade $2/3$ de resultar cara num lançamento. Imagine que uma moeda é retirada da urna e lançada duas vezes. O primeiro lançamento sai cara, e o segundo coroa. Dadas essas informações, qual a probabilidade de que a moeda não seja viciada? (Resp.: $9f/(9f + 8b)$)

14. Suponha que lancemos n dados não viciados.

- (a) Qual é a probabilidade de que o lançamento resulte em n faces distintas?
- (b) Qual é a probabilidade de que ao menos um número apareça mais de uma vez?

15. Suponha que um determinado teste de sangue produza dois resultados: positivo ou negativo para alguma doença. É sabido que o teste de 95% das pessoas com a tal doença indica positivo, mas o teste de 2% das pessoas que não têm a doença também resulta positivo. Imagine que 1% da população está de fato doente. Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente tenha a doença, dado que tenha testado positivamente? (Resp.: 32%)

16. Considere os seguintes eventos:

$A = \{A \text{ pessoa está doente}\}$

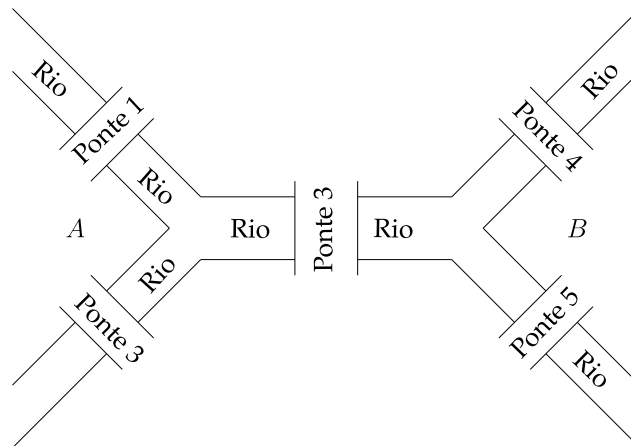
$B = \{\text{O teste de sangue da pessoa resultou positivo para a doença.}\}$

$C = \{A \text{ pessoa não apresenta sintomas.}\}$

Assuma agora que $P(A) = 0.3$, $P(B|A) = 0.75$, $P(B|A^c) = 0.20$, $P(C|A \cap B) = 0.20$, $P(C|A^c \cup B) = 0.15$, $P(C|A \cap B^c) = 0.80$, $P(C|A^c \cup B^c) = 0.90$. Calcule:

- (a) $P(A \cap B \cap B \cap C)$ (Resp: 0.045);
- (b) $P(B^c \cup C)$ (Resp.: 0.564);
- (c) $P(C)$ (Resp.: 0.630);
- (d) a probabilidade de a pessoa estar doente, dado que é assintomática e o teste tenha resultado negativo. (Resp.: 0.1064)

17. Imagine que você gostaria de ir do ponto A ao ponto B na figura abaixo. Existem 5 pontes disponíveis, conectando os diferentes trechos de terra.



Suponha ainda que, no momento da travessia, a ponte i esteja aberta com probabilidade P_i ($i = 1, \dots, 5$). Seja A o evento em que haja um caminho de A até B , e seja B_k o evento em que a k -ésima ponte esteja aberta. Calcule:

- (a) $P(A)$. (Resp.: $P(A) = [1 - (1 - P_1)(1 - P_2)][1 - (1 - P_4)(1 - P_5)]P_3 + (1 - P_3)[1 - (P_1P_4)(1 - P_2P_5)]$)
- (b) $P(B_3|A)$. (Resp.: $\frac{[1 - (1 - P_1)(1 - P_2)][1 - (1 - P_4)(1 - P_5)]P_3}{[1 - (1 - P_1)(1 - P_2)][1 - (1 - P_4)(1 - P_5)]P_3 + (1 - P_3)[1 - (P_1P_4)(1 - P_2P_5)]}$)