SEL5903 – Modelagem de Transitórios em Sistemas Elétricos de Potência

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

SEL5903 – Modelagem de Transitórios em Sistemas Elétricos de Potência
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 3
TRANSITÓRIOS EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

Introdução

- Hipóteses construtivas
  - Simetria
  - Uniformidade da resistividade do solo
- Características da carga
  - Balanceada
- Em condições balanceadas os circuitos trifásicos poderão ser tratados por meio de uma modelagem monofásica
- Contudo
  - Aspectos de carga:
  - Aspectos das faltas:
  - Etc.

Componentes simétricas em sistema trifásico

- 1918: C. L. Fortescue, *Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*
- Um sistema qualquer com *n* fases pode ser analisado por meio de *n* – 1 sistemas equilibrados e um sistema de sequência zero.

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0}$$

$$V_b = V_{b1} + V_{b2} + V_{b0}$$

$$V_c = V_{c1} + V_{c2} + V_{c0}$$

Componentes simétricas em sistema trifásico

$$\begin{cases} V_{a0} = V_0 \\ V_{b0} = V_0 \\ V_{c0} = V_0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{a1} = V_1 \\ V_{b1} = V_1 \cdot 1\angle{-120^o} \\ V_{c1} = V_1 \cdot 1\angle{120^o} \end{cases} \quad \begin{cases} V_{a2} = V_2 \\ V_{b2} = V_2 \cdot 1\angle{120^o} \\ V_{c2} = V_2 \cdot 1\angle{-120^o} \end{cases}$$

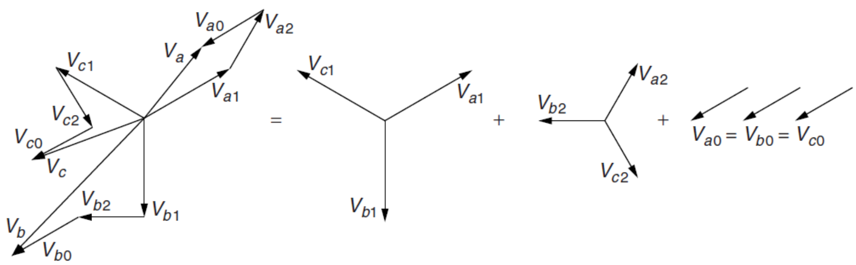
$$\begin{cases} a = 1\angle{120^o} \\ a^2 = 1\angle{240^o} = 1\angle{-120^o} \\ a^3 = 1\angle{360^o} = 1 \\ a^4 = a \\ \vdots \end{cases}$$

Componentes simétricas em sistema trifásico

$$\begin{cases} V_{a0} = V_0 \\ V_{b0} = V_0 \\ V_{c0} = V_0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{a1} = V_1 \\ V_{b1} = V_1 \cdot a^2 \\ V_{c1} = V_1 \cdot a \end{cases} \quad \begin{cases} V_{a2} = V_2 \\ V_{b2} = V_2 \cdot a \\ V_{c2} = V_2 \cdot a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_a = V_0 + V_1 + V_2 \\ V_b = V_0 + V_1 \cdot a^2 + V_2 \cdot a \\ V_c = V_0 + V_1 \cdot a + V_2 \cdot a^2 \end{cases}$$

Componentes simétricas em sistema trifásico



$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix}$$

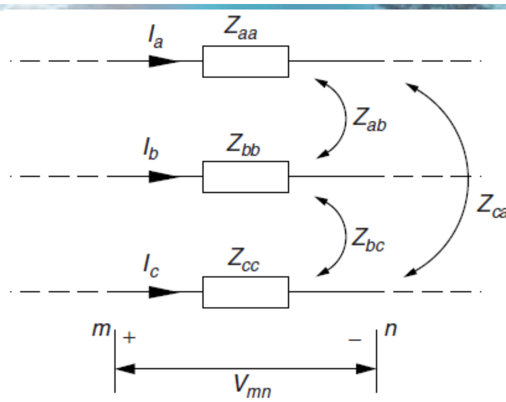
$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{A}\mathbf{V}_{012}$$

Componentes simétricas em sistema trifásico

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_{abc}$$

Componentes simétricas em redes desbalanceadas



$$Z_{aa} \neq Z_{bb} \neq Z_{cc}$$

$$Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$$

Componentes simétricas em redes desbalanceadas

$$V_{mn} = \begin{bmatrix} V_{mn-a} \\ V_{mn-b} \\ V_{mn-c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}V_{mn-012} = \mathbf{ZA}I_{012}$$

$$\mathrm{V}_{mn-012} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{ZA}I_{012} = \mathbf{Z}_{mn-012}I_{012}$$

Componentes simétricas em redes balanceadas

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_P & Z_M & Z_M \\ Z_M & Z_P & Z_M \\ Z_M & Z_M & Z_P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M \\ Z_P + Z_M\left(a + a^2\right) & aZ_P + Z_M\left(1 + a^2\right) & a^2 Z_P + Z_M\left(1 + a\right) \\ Z_P + Z_M\left(a + a^2\right) & a^2 Z_P + Z_M\left(1 + a\right) & aZ_P + Z_M\left(1 + a^2\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Componentes simétricas em redes balanceadas

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M \\ Z_P + Z_M\underbrace{\left(a + a^2\right)}_{-1} & aZ_P + Z_M\underbrace{\left(1 + a^2\right)}_{-a} & a^2 Z_P + Z_M\underbrace{\left(1 + a\right)}_{-a^2} \\ Z_P + Z_M\underbrace{\left(a + a^2\right)}_{-1} & a^2 Z_P + Z_M\underbrace{\left(1 + a\right)}_{-a^2} & aZ_P + Z_M\underbrace{\left(1 + a^2\right)}_{-a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M & Z_P + 2Z_M \\ Z_P - Z_M & a\left(Z_P - Z_M\right) & a^2\left(Z_P - Z_M\right) \\ Z_P - Z_M & a^2\left(Z_P - Z_M\right) & a\left(Z_P - Z_M\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Componentes simétricas em redes balanceadas

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} Z_P+2Z_M & Z_P+2Z_M & Z_P+2Z_M \\ Z_P-Z_M & a\left(Z_P-Z_M\right) & a^2\left(Z_P-Z_M\right) \\ Z_P-Z_M & a^2\left(Z_P-Z_M\right) & a\left(Z_P-Z_M\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\left(Z_P+2Z_M\right) & \left(Z_P+2Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) & \left(Z_P+2Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) \\ \left(Z_P-Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) & 3\left(Z_P-Z_M\right) & \left(Z_P-Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) \\ \left(Z_P-Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) & \left(Z_P-Z_M\right)\left(1+a+a^2\right) & 3\left(Z_P-Z_M\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_P+2Z_M & 0 & 0 \\ 0 & Z_P-Z_M & 0 \\ 0 & 0 & Z_P-Z_M \end{pmatrix}$$

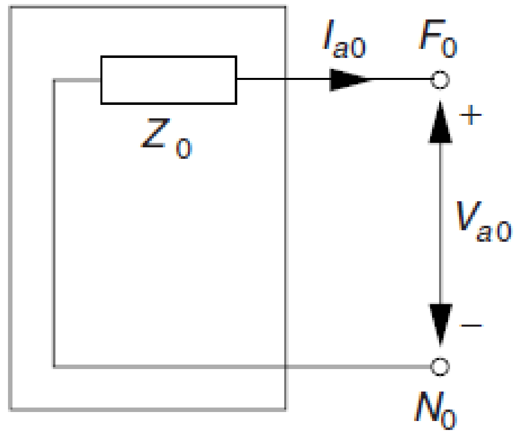
Redes de sequência

- Quando se considera que as impedâncias próprias são iguais entre si e que as mútuas também o são, a matriz das impedâncias simétricas será uma matriz diagonal.
  - $Z_0 = Z_{própria} + 2Z_{mútua}$
  - $Z_1 = Z_2 = Z_{própria} - Z_{mútua}$

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

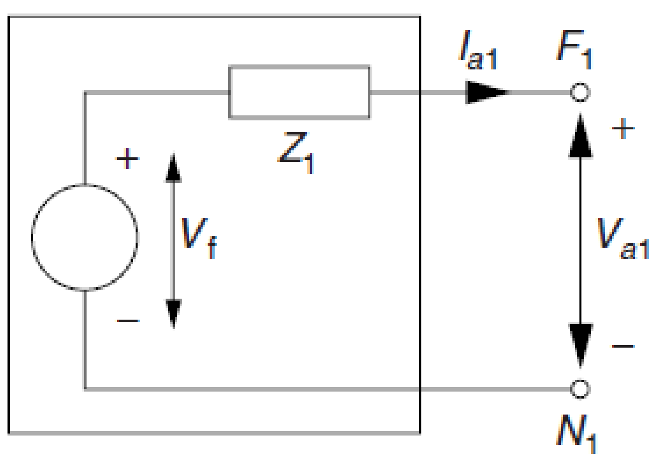
Redes de sequência

- Sequência zero



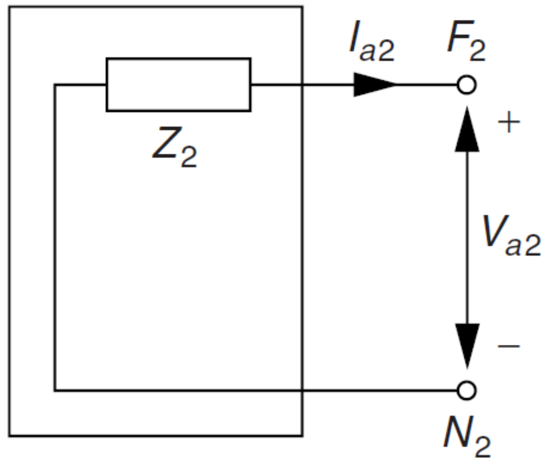
Redes de sequência

- Sequência positiva



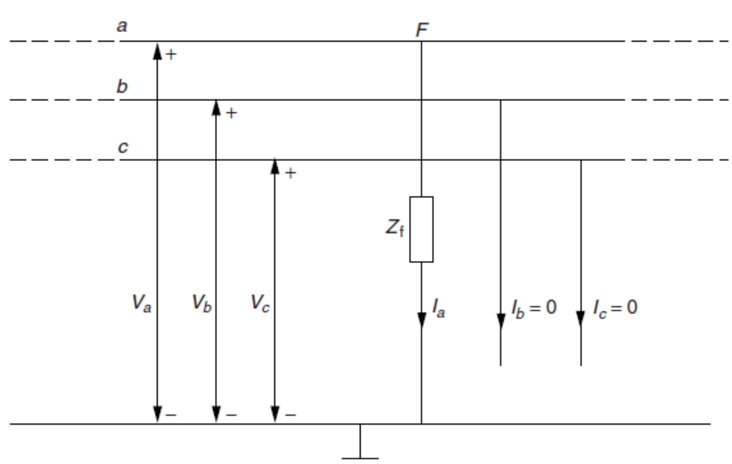
Redes de sequência

- Sequência negativa



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Faltas fase-terra



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

$$I_b = I_c = 0$$

$$V_a = Z_f I_a$$

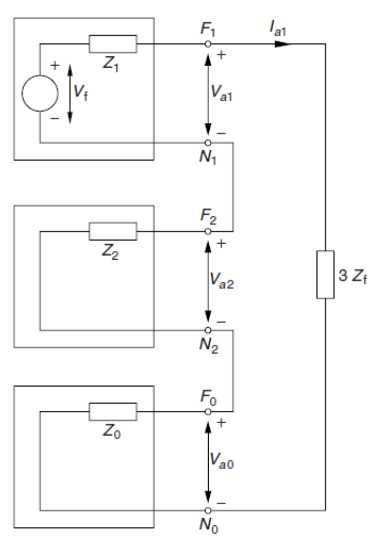
$$I_{012} = A^{-1} I_{abc}$$

$$I_{012} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} I_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = Z_f I_a = 3 Z_f I_{a1}$$

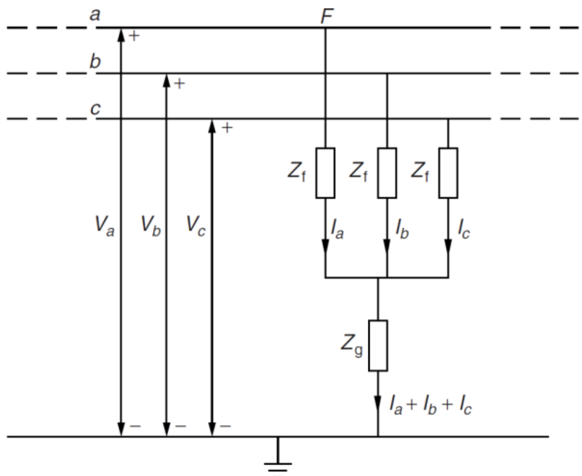
Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

$$I_{a0} = I_{a1} = I_{a2} = \frac{V_f}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f}$$



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Falta-trifásica ao terra



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

$$V_a = Z_f I_a + Z_g(I_a + I_b + I_c)$$

$$V_b = Z_f I_b + Z_g(I_a + I_b + I_c)$$

$$V_c = Z_f I_c + Z_g(I_a + I_b + I_c)$$

$$V_a = (V_{a0} + V_{a1} + V_{a2}) = Z_f(I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}) + 3Z_g I_{a0}$$

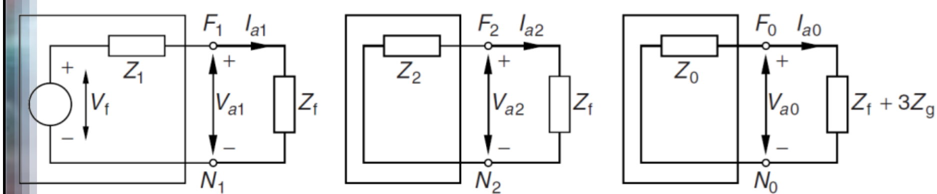
$$V_b = (V_{a0} + a^2 V_{a1} + aV_{a2}) = Z_f(I_{a0} + a^2 I_{a1} + aI_{a2}) + 3Z_g I_{a0}$$

$$V_c = (V_{a0} + aV_{a1} + a^2 V_{a2}) = Z_f(I_{a0} + aI_{a1} + a^2 I_{a2}) + 3Z_g I_{a0}$$

$$\boxed{I_a + I_b + I_c = 3I_{a0} = 0}$$

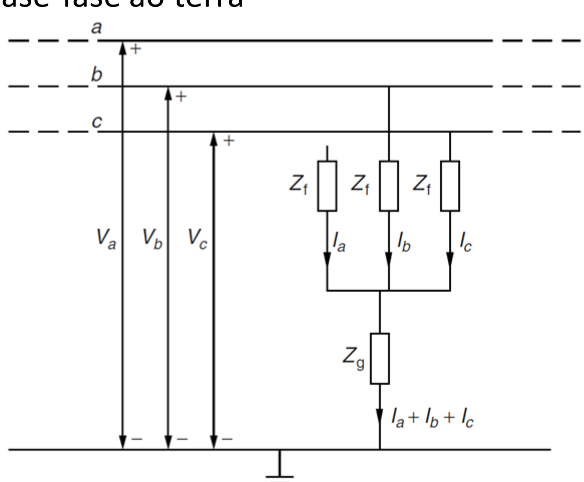
Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

$$I_{012} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{a1} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Falta fase-fase ao terra



Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Condições de contorno

$$I_a = 0$$

$$V_b = (Z_f + Z_g)I_b + Z_g I_c$$

$$V_c = (Z_f + Z_g)I_c + Z_g I_b$$

- Transformando para componentes de sequência, tem-se:

$$I_a = 0 = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}$$

$$V_b = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}$$

$$V_c = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2}$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a diferença entre as tensões Vb e Vc, tem-se:

$$V_b = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}$$

$$V_c = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2}$$

$$V_b - V_c = 0 + V_{a1}\left(a^2 - a\right) - V_{a2}\left(a^2 - a\right)$$

$$V_b - V_c = \left(V_{a1} - V_{a2}\right)\underbrace{\left(a^2 - a\right)}_{-j\sqrt{3}}$$

$$V_b - V_c = -j\sqrt{3}\left(V_{a1} - V_{a2}\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a diferença entre as tensões Vb e Vc, tem-se:

$$V_b = \left(Z_F + Z_g\right) I_b + Z_g I_c$$

$$V_c = \left(Z_F + Z_g\right) I_c + Z_g I_b$$

$$V_b - V_c = \left(Z_F + Z_g\right)\left(I_b - I_c\right) - Z_g\left(I_b - I_c\right)$$

$$V_b - V_c = \left(Z_F + Z_g - Z_g\right)\left(I_b - I_c\right)$$

$$V_b - V_c = Z_F\left(I_b - I_c\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a diferença entre as correntes Ib e Ic, tem-se:

$$I_b = I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2}$$

$$I_c = I_{a0} + a I_{a1} + a^2 I_{a2}$$

$$I_b - I_c = 0 + I_{a1}\left(a^2 - a\right) - I_{a2}\left(a^2 - a\right)$$

$$I_b - I_c = \left(I_{a1} - I_{a2}\right)\underbrace{\left(a^2 - a\right)}_{-j\sqrt{3}}$$

$$I_b - I_c = -j\sqrt{3}\left(I_{a1} - I_{a2}\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Igualando a diferença entre as tensões:

$$-j\sqrt{3}\left(V_{a1}-V_{a2}\right)=Z_F\left(I_b-I_c\right)$$

$$-j\sqrt{3}\left(V_{a1}-V_{a2}\right)=-j\sqrt{3}Z_F\left(I_{a1}-I_{a2}\right)$$

$$V_{a1}-V_{a2}=Z_F\left(I_{a1}-I_{a2}\right)$$

$$V_{a1}-Z_F I_{a1}=V_{a2}-Z_F I_{a2}$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a soma entre as tensões Vb e Vc, tem-se:

$$V_b=V_{a0}+a^2V_{a1}+aV_{a2}$$

$$V_c=V_{a0}+aV_{a1}+a^2V_{a2}$$

$$V_b+V_c=2V_{a0}+V_{a1}\left(a^2+a\right)+V_{a2}\left(a^2+a\right)$$

$$V_b+V_c=2V_{a0}+\left(V_{a1}+V_{a2}\right)\underbrace{\left(a^2+a\right)}_{-1}$$

$$V_b+V_c=2V_{a0}-\left(V_{a1}+V_{a2}\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a soma entre as tensões Vb e Vc, tem-se:

$$V_b = \left(Z_F + Z_g\right) I_b + Z_g I_c$$

$$V_c = \left(Z_F + Z_g\right) I_c + Z_g I_b$$

$$V_b + V_c = \left(Z_F + Z_g\right)\left(I_b + I_c\right) + Z_g\left(I_b + I_c\right)$$

$$V_b + V_c = \left(Z_F + Z_g + Z_g\right)\left(I_b + I_c\right)$$

$$V_b + V_c = \left(Z_F + 2Z_g\right)\left(I_b + I_c\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Fazendo a soma entre as correntes Ib e Ic, tem-se:

$$I_b = I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2}$$

$$I_c = I_{a0} + a I_{a1} + a^2 I_{a2}$$

$$I_b + I_c = 2I_{a0} + I_{a1}\left(a^2 + a\right) + I_{a2}\left(a^2 + a\right)$$

$$I_b + I_c = 2I_{a0} + \left(I_{a1} + I_{a2}\right)\underbrace{\left(a^2 + a\right)}_{-1}$$

$$I_b + I_c = 2I_{a0} - \left(I_{a1} + I_{a2}\right)$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Substituindo $\boldsymbol{I_b} + \boldsymbol{I_c}$ em $\boldsymbol{V_b} + \boldsymbol{V_c}$, tem-se:

$$V_b + V_c = Z_f[2I_{a0} - (I_{a1} + I_{a2})] + Z_g[4I_{a0} - 2(I_{a1} + I_{a2})]$$

- Igualando as diferenças de tensão, tem-se:

$$2V_{a0} - 2Z_f I_{a0} - 4Z_g I_{a0} = V_{a1} + V_{a2} - Z_f(I_{a1} + I_{a2}) - 2Z_g(I_{a1} + I_{a2})$$

$$I_{a1} + I_{a2} = -I_{a0}$$

- Lembrando que

$$V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0} = V_{a1} - Z_f I_{a1}$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Dos desenvolvimentos feitos, tem-se:

$$I_a = 0 = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}$$

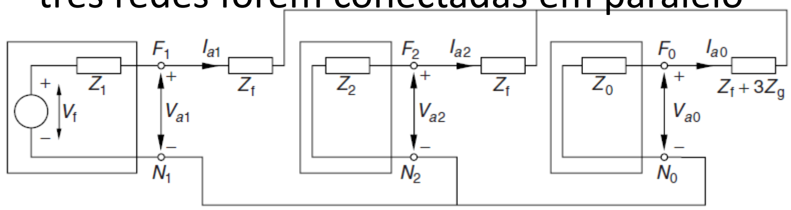
  - Essa igualdade mostra que as redes de sequência são conectadas em uma única rede.

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = V_{a2} - Z_f I_{a2}$$

  - Essa equação permite afirmar que as tensões nas redes de sequência positiva e negativa são iguais se a elas for conectada uma impedância Zf.
  - O mesmo pode ser afirmado se na rede de sequência zero uma impedância Zf + 3Zg for conectada em série.

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

- Essas condições podem ser atendidas se as três redes forem conectadas em paralelo



$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_f + \dfrac{(Z_2 + Z_f)(Z_0 + Z_f + 3Z_g)}{Z_0 + Z_2 + 2Z_f + 3Z_g}}$$

Análise de faltas assimétricas em sistemas trifásicos

$$V_{a1} = V_f - Z_1 I_{a1}$$

$$V_a = 3V_{a1} = 3V_f \frac{Z_2 Z_0/(Z_2 + Z_0)}{\left(Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_0}{(Z_2 + Z_0)}\right)}$$

$$\mathrm{FPTC} = \frac{V_a}{V_f} = 3\frac{Z_2 Z_0}{Z_1 (Z_2 + Z_0) + Z_2 Z_0}$$ *first-pole-to-clear*