A INTEGRAL DE RIEMANN EM TRÊS VARIÁVEIS

As definições e propriedades da integral de Riemann para funções de três variáveis $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são muito semelhantes ao caso de duas variáveis, como veremos. Vamos rever inicialmente alguns conceitos de topologia, enunciados anteriormente para o caso do plano.

1. Conceitos básicos de topologia no espaço $\mathbb{R}^3$

Os conceitos que usaremos são bastante similares aos introduzidos no caso do plano.

Definição 1.1. *Dado o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$ definimos sua norma (euclidiana), por*

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dados agora os pontos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$e $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ definimos a distância entre eles por

$$d(P, P_0) = \|P_0 - P\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Definição 1.2. *A bola aberta de raio $r > 0$ e centro em $P_0 = (x_, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é o conjunto*

$$B_P(r) := \{X \in \mathbb{R}^3 : d(X, P) < r\}$$

A bola fechada de raio $r > 0$ e centro em $P_0 = (x_, y) \in \mathbb{R}^3$ é definido analogamente, trocando a desigualdade estrita $<$ por $\leq$,

Definição 1.3. *Uma vizinhança V_P, do ponto $P \in \mathbb{R}^3$ é qualquer suconjunto do espaço que contenha uma bola aberta centrada em P.*

Date: August 31, 2023.

Definição 1.4. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, dizemos que um ponto $P \in \mathbb{R}$ é:*

- ***ponto interior*** *de A se existe uma vizinhança V_P de P. contida em A.*
- ***ponto aderente*** *de A se toda vizinhança V_P de P, contém algum ponto de A.*

Denotaremos por $\overset{\circ}{A}$ e denominaremos **interior de** A o conjunto dos pontos interiores de A. Denotaremos por $\bar{A}$ e denominaremos **fecho (ou aderência) de** A o conjunto dos pontos aderentes de A. Não é difícil verificar que $\overset{\circ}{A} \subset A$ e $A \subset \bar{A}$.

Definição 1.5. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ é denominado:*

- ***aberto*** *se $\overset{\circ}{A} = A$,*
- ***fechado*** *se $A = \bar{A}$.*

Em outras palavras, $A \subset \mathbb{R}^3$ é aberto se, para todo $P \in A$, existe alguma bola aberta contendo P e totalmente contido em A. e fechado se todo $P \in \mathbb{R}$, que possui pontos de A arbitrariamente próximos está em A.

Exemplos 1.6. • *O espaço todo é um subconjunto aberto (e fechado!) do espaço $\mathbb{R}^3$.*

- *O semiespaço aberto* $\{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ *é um subconjunto aberto do espaço.*
- *O semiespaço fechado* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ *é um subconjunto fechado do espaço.*
- *A bola aberta de centro em* P, $B_P(r)$ *é um suconjunto aberto do espaço.*
- *A bola fechada de centro em* P *é um suconjunto fechado do espaço.*
- $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$ *é subconjunto aberto do espaço.*
- *O complementar de uma bola fechada é subconjunto aberto, o complementar de uma bola aberta é um subconjunto fechado.*
- *O conjunto vazio é aberto e fechado.*
- *O fecho de um conjunto* A *é fechado.*
- *O interior de um cojunto* A *é aberto.*

Proposição 1.7. *Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^3$ *é fechado se e somente se seu complementar* $\mathbb{R}^3 \setminus A$ *é aberto.*

Dem. Suponhamos que A é fechado e seja $P \in \mathbb{R}^3 \setminus A$. Então $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{A}$. Portanto existe uma vizinhança V_P de P tal que $V_P \cap A = \emptyset \to V_P \subset A$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{R}^3 \setminus A$ é aberto e seja $P \in \bar{A}$. Então toda vizinhança de P intercepta A de onde segue que $P \not\in \mathbb{R}^3 \setminus A$ e, portanto, $P \in A$. $\square$

Proposição 1.8.

(1) *Se* $A_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família qualquer de abertos de* $\mathbb{R}^3$, *então a união* $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ *é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Se* A_1 *e* A_2 *são subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^3$, *então* $A_1 \cap A_2$ *é subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^3$.

Dem.

(1) Se $P \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ então $P \in A_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Sendo A_λ aberto, existe uma vizinhança de P, $V_P \subset A_\lambda$ e, daí $V_P \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

(2) (1) Se $P \in A_1 \cap A_2$ então $P \in A_1$ e $P \in A_1$. Sendo A_1 e A_1 abertos, existem vizinhanças de P, ${V_P}^1 \subset A_1$ e ${V_P}^2 \subset A_2$. Segue que $V_P := {V_P}^1 \cap {V_P}^2$ é vizinhança de P contida em $A_1 \cap A_2$. □

Corolário 1.9.

(1) *Se $A_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família qualquer de fechados de $\mathbb{R}^3$, então a interseção $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um conjunto fechado.*

(2) *Se A_1 e A_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^3$, então $A_1 \cup A_2$ é subconjunto fechado.*

Dem. Basta tomar complementos na proposição anterior e usar as "Leis de Morgan". □

Definição 1.10. *A fronteira (ou bordo) de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, denotada por ∂A é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que são aderentes a A mas não são pontos interiores de A. Ou seja:*

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

Observação 1.11. (1) *Um ponto P pertence a ∂A se e somente se toda vizinhança de P contém algum ponto de A e também algum ponto do complementar $\mathbb{R}^3 \setminus A$.*

(2) *A é fechado se e somente se $\partial A \subset A$.*

(3) *A é aberto se e somente se $\partial A \cap A = \emptyset$.*

Definição 1.12.
- *Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ é **limitado**, se existir um retângulo compacto $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ tal que $D \subset \mathcal{R}$.*
- *Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ é **compacto** se D for fechado e limitado.*

Exemplos 1.13.
- *O semiespaço aberto $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ não é limitado*

- *O fecho de W é o semiespaço fechado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ é fechado, mas não limitado*
- *O disco aberto de centro em P e raio r, $B_P(r)$ é limitado, mas não é fechado.*
- *O disco fechado de centro em P e raio r, $\overline{B_P(r)}$ é compacto.*
- *O fecho de qualquer conjunto limitado $D \subset \mathbb{R}^3$ é compacto.*

2. Integral em paralelepípedos

Definição 2.1. *Um paralelepípedo é um subconjunto $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^3$ que é produto cartesiano de intervalos da I_1 I_2 e I_3 ou seja:*

$$\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x \in I_1,\ y \in I_2, z \in I_3.\}$$

Diremos que o paralelepípedo $\mathcal{W}$ é compacto se $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_2 = [a_3, b_3]$ são intervalos fechados e limitados.

Definição 2.2. *Uma **partição** do paralelepípedo compacto $\mathcal{W} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ é um produto cartesiano $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, sendo*

$$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_l, \}$$

$$P_2 = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m\}$$

$$P_3 = \{z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n\}$$

partições de $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ e $[a_3, b_3]$, respectivamente.

Dada uma partição P do paralelepípedo $\mathcal{W}$, este fica dividido em subparalelepípedos $W_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Usaremos as notações $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_i = z_k - z_{k-1}$ e $V(W_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j , \Delta z_k$ (o volume do ijk-ésimo paralelepípedo V_{ijk}).

Definição 2.3. *A **norma** da partição P, denotada por $\|P\|$ é o máximo dos comprimentos das diagonais dos subparalelepípedos W_{ijk}*

Definição 2.4. *Dizemos que a partição P do paralelepípedo $\mathcal{W}$ foi marcada, se foi escolhido um ponto ξ_{ijk} em cada subparalelepípedo $\mathcal{W}_{ij}$.*

Definição 2.5. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição marcada de $\mathcal{W} \subset A$, definimos a **soma de Riemann** de f relativa a $\dot{\mathcal{P}}$ por*

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{ijk}) \Delta x_i \, \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{ijk} f(\xi_{ijk}) V(W_{ijk}).$$

Podemos agora definir a integral de Riemann de f no paralelepípedo $\mathcal{W}$.

Definição 2.6. *Dizemos que a função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é **Riemann integrável** no paralelepípedo $\mathcal{W} \subset D$ se existir o limite L das somas de Riemann de f no paralelepípedo $\mathcal{W}$ ou, mais exatamente, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que a **soma de Riemann** de f relativa a qualquer partição marcada $\dot{\mathcal{P}}$, com $\|P\| < \delta$ satisfaz*

$$\|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L\| < \epsilon.$$

Se f é Riemann integrável no paralelepípedo $\mathcal{W}$, o limite L acima é denominado a **integral de Riemann** de f em $\mathcal{W}$ e escrevemos

$$\int_{\mathcal{W}} f = L \quad \text{ou} \quad \iiint_{\mathcal{W}} f = L$$

Outras notações, como $\int_{\mathcal{W}} f(x,y)\,d\,x\,d\,y$, $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\,xd\,y$ também são frequentemente usadas.

3. Integral em domínios limitados do espaço

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado no espaço e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Se $\mathcal{W}$ é um paralelepípedo contendo D podemos definir uma extensão de f a $\mathcal{W}$, ou seja, uma nova função $\tilde{f} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, cuja restrição a D é f da seguinte forma:

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in D, \\ 0 \ \text{se} & x \in \mathcal{W} - D. \end{cases} \tag{1}$$

Definição 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado no espaço, $f : D \to \mathbb{R}$ e $\tilde{f}$ a extensão de f definida por* (1)*. A integral de f em D é:*

$$\iiint_D f := \iiint_{\mathcal{W}} \tilde{f}.$$

se $\tilde{f}$ for integrável em $\mathcal{W}$.

Agora, como já observamos, a função $\tilde{f}$ pode ser descontínua em ∂D, mesmo se f for contínua em D. Ocorre que, em muitas casos de interesse, ∂D é um conjunto "pequeno", como veremos.

Definição 3.2. *Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon >$, existir uma família finita de paralelepípedos $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$, cuja união contém D tais que a soma de suas áreas seja menor do que ϵ, ou seja: $\cup_1^n \mathcal{W}_n \supset D$ e $\sum_1^n A(\mathcal{W}_n) < \epsilon$,*

Proposição 3.3. *São subconjunto de conteúdo nulo em $\mathbb{R}^3$.*

- *Um subconjunto finito.*
- *A união finita de subconjuntos de conteúdo nulo.*

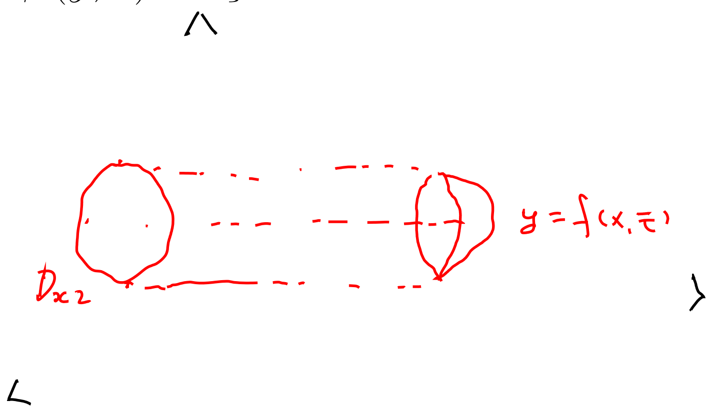
- *O gráfico de uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se D for subconjunto limitado de $\mathbb{R}^3$.*

Teorema 3.4. *Se $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada no paralelepípedo $\mathcal{W}$, exceto em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de conteúdo nulo, então f é integrável em $\mathcal{W}$.*

Corolário 3.5. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada, exceto em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ de conteúdo nulo e a fronteira de D também tiver conteúdo nulo então f é integrável.*

Um caso particular importante de domínio com fronteira de conteúdo nulo é o de domínios de um dos seguintes tipos:

- **Domínios do tipo I** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy} \in \mathbb{R}^2, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, sendo $D_{xy} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ funções contínuas.
- **Domínios do tipo II** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_{xz} \in \mathbb{R}^2, \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)\}$, sendo $D_{xz} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(x, z)$ e $\beta(x, z)$ funções contínuas.
- **Domínios do tipo III** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz} \in \mathbb{R}^2, \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)\}$, sendo $D_{yz} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(y, z)$ e $\beta(y, z)$ funções contínuas.



Exemplo 3.6. *O conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq x^2 + y\}$ é um domínio do tipo I.*

Algumas propriedades importantes da integral de Riemann são as seguintes:

Proposição 3.7. *(Propriedades algébricas da integral) Suponhamos que* $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *são integráveis . Então*
a) Se $k \in \mathbb{R}$, kf *é integrável em* D *e*

$$\iiint_D kf = k \iiint_D f.$$

b) $f + g$ *é integrável em* D *e*

$$\iiint_D f + g = \iiint_D f + \iiint_D g.$$

c) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$ *então*

$$\iiint_D f \leq \iiint_D g.$$

d) A função $|f|$ *é integrável em* D *e*

$$\left| \iiint_D f \right| \leq \iiint_D |g| \,.$$

Dem. Vamos demonstrar b), os outros itens são semelhantes e ficam a cargo do leitor.

Seja $L_1 = \iiint_a^b f$ e $L_2 = \iiint_a^b g$. Dado $\epsilon > 0$, sejam δ_1 e δ_2 tais que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_1 \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \epsilon/2$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_2 \Rightarrow |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2$.

Se $\delta - \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, teremos então $|S(f + g, \dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| \leq |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(g, \dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. $\square$

Proposição 3.8. *Suponhamos que* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $D = D_1 \cup D_2$ *e* $D_1 \cap D_2$ *tenha conteúdo nulo. então* f *é integrável em* D *se e* *somente se f é integrável em D_1 e D_2 e, nesse caso,*

$$\iiint_D f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} g.$$