Estimadores de máxima verossimilhança (EMV)

Devemos escolher aquele valor $\hat{\underline{\theta}}$ do parametro $\underline{\theta}$, que maximize a probabilidade de amostra observada

Ex. 1 (caso discreto) Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ - observações independentes de $X \sim Po(\theta)$ i.e. $P(X=k) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$, $k=0,1,2,\dots$. Obter EMV para θ.

Solução:

Consideramos probabilidade conjunta $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) \overset{indep}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$

passo 1 i.e. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i=x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$

passo 2: $l(\theta) = \ln L(\theta) = -n\theta + \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{const} \ln\theta - \underbrace{\ln \prod_{i=1}^n x_i!}_{const}$

$\boxed{\text{Lembre } [\ln\theta]' = \frac{1}{\theta}}$

passo 3: EMV $\hat{\theta}$ que maximiza $l(\theta)$ é raiz de $[l(\theta)]' = 0$, i.e

$$l'(\theta) = \left[-n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln\theta - \ln\prod_{i=1}^n x_i!\right]' = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X} \text{ é EMV}$$

Ex. 2 (discreto) $X_1, X_2, \dots, X_n$ são obs. ind. de $X \sim Bernoulli(p)$, i.e.

X	1	0
Prob.	p	$1-p$

$P(1)=P(S)=p$, $P(0)=P(F)=1-p$

e são observados $\underline{k}$ sucessos. Encontre EMV para $\theta \in (0,1)$.

Solução: Como $L(\theta) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) = \theta^k(1-\theta)^{n-k}$

$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left[\theta^k(1-\theta)^{n-k}\right] = k\ln\theta + (n-k)\ln(1-\theta)$

$[l(\theta)]' = 0 \Leftrightarrow [k\ln\theta + (n-k)\ln(1-\theta)]' = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{\theta} + \frac{n-k}{1-\theta}(-1) = 0$

$\boxed{\text{Lembre } [\ln(1-\theta)]' = -\frac{1}{1-\theta}}$

$\Leftrightarrow$ raiz $\hat{\theta}$ de $[l(\theta)]' = 0$ obtemos de $\frac{k}{\theta} = \frac{n-k}{1-\theta} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{k}{n}}$ é EMV para $\underline{\theta}$.

Ex 3 (caso cont.) $X_1, \dots, X_n$ são obs. ind. de $X \sim N(\mu, \theta)$, μ é conhecido. $\hat{\theta} = ?$

i.e. densidade $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}\right]$ $-\infty < x < \infty$, $\theta > 0$

Solução

Densidade conjunta $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right]$, i.e.

$$L(\theta) = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right] \Rightarrow l(\theta) = \ln L(\theta) = -\frac{n}{2}\left[\underbrace{\ln 2\pi}_{const} + \ln\theta\right] - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\theta}$$

$$\Rightarrow l'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} - \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}_{const}\left(\frac{1}{-2\theta^2}\right) = 0$$

$\boxed{\text{Lembre } \left(\frac{1}{\theta}\right)' = (-1)\frac{1}{\theta^2}}$

$\Rightarrow$ EMV $\boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}}$

- Se $\mu = 0 \Rightarrow$ EMV $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$
- Se $\underline{\mu}$ é desconhecido, use $\overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$

Ex 4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ são obs. ind. de $X \sim U(0,\theta)$, i.e. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{se } 0<x<\theta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Encontre EMV para θ.

Solução

Densidade conjunta $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} & \text{se } 0<x_i<\theta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

i.e. $L(\theta) = \theta^{-n} \Rightarrow [\ln(\theta)]' = 0 \Leftrightarrow [\ln(\theta^{-n})]' = 0 \Leftrightarrow [-n\ln\theta]' = 0 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{n}{\theta} = 0} \Rightarrow$ impossível

i.e. não existe EMV para θ neste caso.

Ex (casa) $X_1, X_2, \dots, X_n$ são obs. ind. de $X \sim Exp(\theta)$, i.e. $f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x>0$. Encontre $\hat{\theta}$ - EMV.