ESPAÇOS VETORIAIS E SUBESPAÇOS

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$,

$$V \times V \xrightarrow{+} V \qquad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \rightsquigarrow u+v \in V \qquad (a, v) \rightsquigarrow av \in V$$

Um subconjunto W de V, $W \neq \emptyset$ é um subespaço de V se

$(W, +, \cdot)$ for um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
operações de V

Se $(W, +, \cdot)$ é um subespaço, então, as operações de V, precisam ser operações em W, isto é

$$W \times W \xrightarrow{+} W \qquad \mathbb{R} \times W \longrightarrow W$$
$$(w_1, w_2) \rightsquigarrow w_1 + w_2 \in W \qquad (a, w) \rightsquigarrow aw \in W$$

e daí satisfazerem os 8 axiomas, A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4.

Vamos mostrar o seguinte resultado:

TEOREMA: $\emptyset \neq W \subset V$ é um subespaço de V se, e somente se,

(1) $0 \in W$;

(2) Se $w_1, w_2 \in W$ então $w_1 + w_2 \in W$;

(3) Se $w \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, $aw \in W$.

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Se W é um subespaço de V, as operações em V já são operações em W.

Como $W \neq \emptyset$, existe $w \in W$.

Por (3) $\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{0} \cdot \underset{\underset{W \subset V}{\cap}}{w} = \underset{\underset{0_V = 0_W}{\cap}}{0} \in W$.

W sendo espaço vetorial já teria um único elemento neutro da adição 0_W.

$$\underset{\underset{W}{\cap}}{0} + 0_W = 0 = 0 + 0_W = 0_W$$

pois 0_W é neutro de W — zero de V — $\in W \subset V$

(Também sabemos que se $w \in W$, então

(1) $0 \in W$.
$\hookrightarrow 0$ de V

(2) e (3) basta usar que as operações de V restritas a W, são operações em W.

($\Leftarrow$) Suponha que $W \subset V$ é tal que valem (1), (2) e (3).

(1) $\Rightarrow W \neq \emptyset$, pois $0 \in W$

(2) $\Rightarrow$
$$+ : W \times W \longrightarrow W$$
$$(w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$$
é uma operação em W

e aí valem A1, A2, A3, A4, pois elas já valem em V.

Também valem M1, M2, M3, M4 em W, pois valem em V.
(Os vetores de W, são vetores de V) ∎

Assim para verificar se um subconjunto de um espaço vetorial V é um subespaço de V basta verificar se valem (ou não) (1), (2) e (3).

Exemplos:

$V = \mathbb{R}^3$

(1) $W = \{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \}$

Não é subespaço pois $(0,0,0) \notin W$
(já que $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$)

(2) $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \}$

(1) $(0,0,0) \in W$

(2) $(x_1, y_1, z_1) \in W$ e $(x_2, y_2, z_2) \in W$
$\Rightarrow x_1 = y_1 = z_1$ $\qquad$ $x_2 = y_2 = z_2$

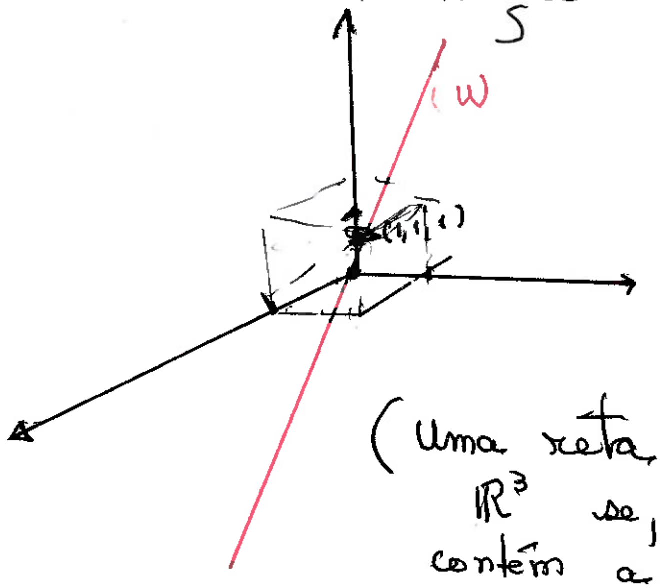
Então $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ é tal que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$

) $a(x,y,z) = (ax, ay, az)$
$\underset{W}{\underbrace{\qquad}}$ $x = y = z \Rightarrow ax = ay = az$

Observe que

$$W = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(é a reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1,1,1)$.)



(Uma reta é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se ela contém a origem.)

(3) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(1) $(0,0,0) \in W$

$(n, y_1, z_1) \in W$, $(m, y_2, z_2) \in W \Rightarrow$ ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$)

(2) $(\underbrace{n+m}_{\in \mathbb{Z}}, y_1+y_2, z_1+z_2) \in W$

(3) Não vale

$(1,1,1) \in W$

mas $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin W$ já que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

(4) Espaços Vetoriais que são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ é função $\}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ é contínua em $\mathbb{R} \}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ é derivável em $\mathbb{R} \}$

$C^{\infty}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ é infinitamente derivável em $\mathbb{R} \}$

(Pelo Cálculo I sabemos que os 3 conjuntos são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.)

(5) $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$

Uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ é chamada de seqüência.

$f(n) = a_n$

Costumamos denotar f por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots)$

Um subespaço importante de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$

$Q = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é quase-nula $\}$

DEF: Uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é QUASE-NULA se apenas um nº finito dos termos a_n é não nulo, isto é, se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq N$.

(1) Se $a_n = 0 \ \forall n$ seqüência nula
$(f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N})$

(2) Suponha que (a_n) e (b_n) são seqüências quase nulas.

Existe $N_1 \geq 0$ tq $a_n = 0$ para todo $n \geq N_1$
Existe $N_2 \geq 0$ tq $b_n = 0$ para todo $n \geq N_2$

Se $N = \max\{N_1, N_2\}$, então
$$a_n + b_n = 0 \quad \forall n \geq N.$$

(3) É claro que se (a_n) é uma sequêcia quase-nula e $a \in \mathbb{R}$, então (aa_n) é uma sequêcia quase nula.

Logo Q é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Um polinômio é uma sequência quase-nula, mas escreveremos assim:

$$1 = (1, 0, 0, \dots) \qquad t = (0, 1, \dots, 0, \dots)$$

$$t^2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots$$

$$t^n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ n+1}}{1}, 0, \dots)$$

A sequência $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ pode ser escrita como:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$p(t) = \underbrace{a_0 1 + a_1 t + \dots + a_n t^n}_{\text{polinômio na variável } t}$$

$$P(\mathbb{R}) = \{ p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \mid n \geq 0 \text{ e } a_i \in \mathbb{R} \}$$

$\hookrightarrow$ espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais

A soma de dois polinômios $p(t), q(t)$, como vai ser?

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$
$$q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$$

Suponha que $n \leq m$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots + a_m t^m$$
$$(a_i = 0 \ \forall \ i > n)$$

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_m + b_m)t^m$$

DEF: Se $p(t) \neq 0$

$$\text{grau } p(t) = \max\{n \mid a_n \neq 0\}$$

grau $0 = -\infty$ (é conveniente)

pois vale que $\text{grau}(p(t)+q(t)) \leq \max\{\text{grau } p(t), \text{grau } q(t)\}$

$(-\infty < 0 < 1 < \cdots < n < n+1 < \cdots)$

Os polinômios de grau 0 são as constantes não nulas.

$P(\mathbb{R}) = \{$ polinômis com coeficientes em $\mathbb{R}\}$

$P_n(\mathbb{R}) = \{p(t) \in P(\mathbb{R}) \mid \text{grau } p(t) \leq n\}$

é um subespaço de $P(\mathbb{R})$.

com a definição de grau $0 = -\infty$, já vale que o polinômio nulo está em $P_n(\mathbb{R})$ já que $-\infty < n$, para todo $n \geq 0$

(Multiplicação de $\underset{\mathbb{R}}{a}\, \underset{P(\mathbb{R})}{p(t)} = (a a_0) + (a a_1)t + \cdots + (a a_n)t^n$)

Se $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P(\mathbb{R})$,

e se $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$\boxed{p(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n \in \mathbb{R}}$$

(Se $p(t) = 1 + 2t + 3t^2$, $p(2) = 1 + 2.2 + 3.2^2 = 17$)

DEF: Dizemos que $r \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $p(t)$ se $p(r) = 0$.

Exercícios da Lista 3

13. $V = P_2(\mathbb{R})$

(a) $W = \{ p \in V \mid p$ possui pelo menos uma raiz real $\}$

(1) $p(t) = 0 \in W$ (todo elemento de $\mathbb{R}$ é raiz do polinômio nulo).

(2) A propriedade (2) não vale

$p(t) = t^2 + 2t + 1$ (tem uma raiz, -1)

$q(t) = t^2 - 2t + 1$ (tem uma raiz, 1)

$p(t) + q(t) = 2t^2 + 2$ e não tem nenhuma raiz real.

(c) $V = P_3(\mathbb{R})$ $\quad W = \{ p(t) \mid p(1) = 0 \}$

(1) $0 \in W$

(2) Suponha que $p(t), q(t) \in W$.

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$

$p(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$q(1) = 0 \Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0$

$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3$

$$(p+q)(1) = a_0+b_0+a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$$
$$= \underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=0} + \underbrace{(b_0+b_1+b_2+b_3)}_{=0} = 0$$

(3) $p(1)=0$ e $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (ap)(1)=0$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$a\,p(t) = aa_0 + (aa_1)t + (aa_2)t^2 + (aa_3)t^3$$
$$(ap)(1) = aa_0 + aa_1 + aa_2 + aa_3$$
$$= a\,\underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=0} = a.0 = 0$$

Logo W é um subespaço de $P_3(\mathbb{R})$. ■

Escrevi uma formalização do que é $P(\mathbb{R})$.

MAS NÃO SE PREOCUPEM:
(Quem entender, ÓTIMO!).

MAS Pode pensar $p(t)$ é uma "expressão formal"

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

onde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e t é uma variável.

Quando fazemos $p(r)$, $r \in \mathbb{R}$, $p(r)$ é o número real

$a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n$ (substitui t por r e chega a um número real $p(r)$)