Introdução às Turbinas e Sistemas de Correnteza

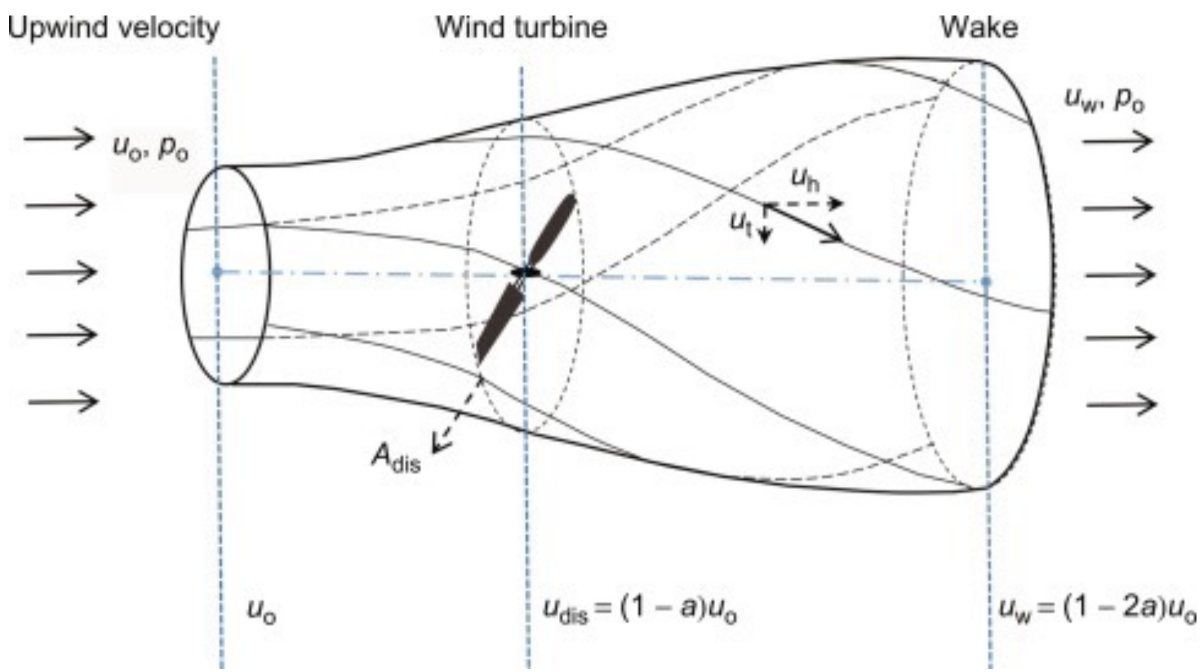
Jordi Mas Soler
Departamento de Engenharia Naval e Oceânica

PNV USP

Teoria do Disco Atuador com Quantidade de Movimento Angular

PNV
USP

Teoria do Disco Atuador



Fator de indução axial (a, a>0): $U_{dis} = U_0(1 - a)$

Fator de indução angular (a', a'>0): $\omega = 2a'\Omega$

PNV USP

https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/induction-factor

Teorias de disco atuador

Aqui, vamos aplicar a equação de Bernoulli para o fluxo angular *através* do disco (entre B e B') considerando ***a velocidade relativa do escoamento* (*W*)** em cada seção:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho W^2(B) = p_B' + \frac{1}{2}\rho W^2(B')$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\{V_B^2 + (\Omega r)^2\} = p_B' + \frac{1}{2}\rho\{V_B^2 + [(\Omega - \omega)r]^2\}$$

E, portanto (verificar):

$$p_B' - p_B = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega(2\Omega - \omega)$$

PNV USP

Teorias de disco atuador

A teoria considerará agora um **Fator de indução angular (a', a'>0)**:

$$\omega = 2\mathrm{a}'\Omega$$

E, então, a variação da pressão entre as faces do anel será:

$$\Delta p = p_B' - p_B = 2\rho r^2\Omega^2 a'(1-a')$$

O elemento de empuxo no anel de espessura dr será dado por:

$$dT = \Delta p dS = \Delta p(2\pi r dr) \rightarrow dT = 4\rho\pi r^3\Omega^2 a'(1-a')dr$$

Ou ainda:

$$\frac{dT}{dr} = 4\rho\pi r^3\Omega^2 a'(1-a') \quad \frac{[F]}{[L]}\left(\frac{N}{m}\right)$$

Teorias de disco atuador

TORQUE SOBRE O ANEL (dQ): Pode ser calculado a partir da variação da quantidade de movimento angular do escoamento que atravessa o anel, lembrando que este escoamento tem vazão em massa $d\dot{m}$:

$$dQ = \left(\frac{d(I\omega)}{dt}\right)_{A\rightarrow C} = (d\dot{m}r^2)\omega = [\rho V_A(1-a)(2\pi r dr)r^2]\omega$$

$$\frac{dQ}{dr} = 4\rho\pi r^3 V_A \Omega a'(1-a) \qquad \frac{[F][L]}{[L]} \quad \left(\frac{Nm}{m}\right)$$

Teorias de disco atuador

Podemos também definir uma eficiência do anel (η_r) a partir da seguinte relação de potências:

$$\eta_r = \frac{dTV_A}{dQ\Omega} = \frac{(1-a')}{(1-a)}$$

Energia dispendida para provocar o giro da esteira

Energia dispendida para acelerar o escoamento à montante

Ainda sem fazer nenhuma consideração adicional sobre a geometria do rotor, poderíamos então escrever:

$$T = \int_0^R \left(\frac{dT}{dr}\right) dr \qquad Q = \int_0^R \left(\frac{dQ}{dr}\right) dr \qquad \eta = \frac{TV_A}{Q\Omega}$$

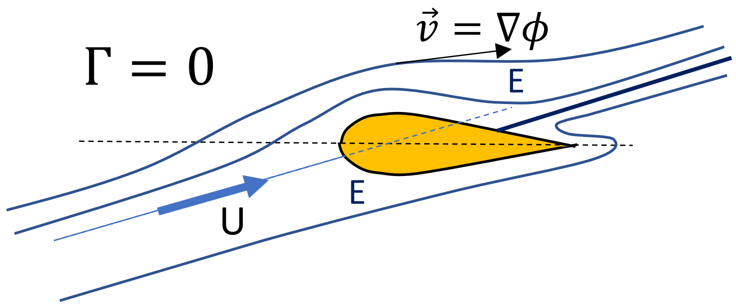
PNV USP

BEM

Teoria de fólios

Fólio: Escoamento 2D

$\Gamma = 0$



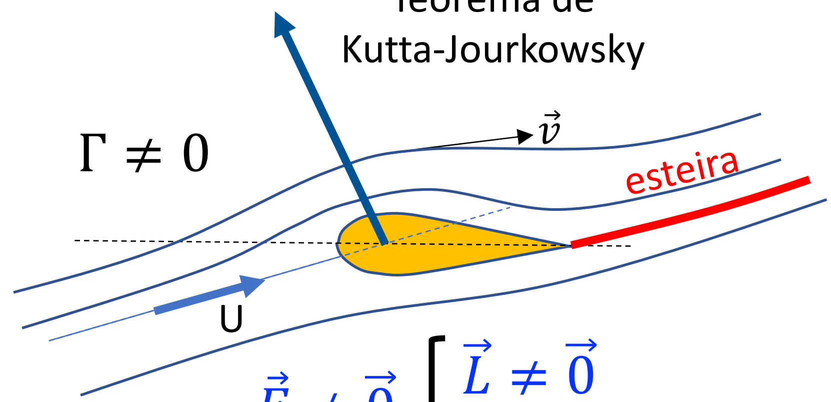
$\vec{F} = \vec{0}$

Impondo uma circulação conhecida (Γ)

$\mathrm{L} = \rho U \Gamma$

Teorema de Kutta-Jourkowsky

$\Gamma \neq 0$



$$\vec{F} \neq \vec{0} \begin{cases} \vec{L} \neq \vec{0} \\ \vec{D} = \vec{0} \end{cases}$$

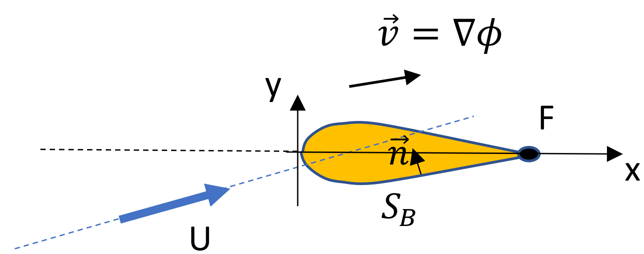
Essa correção é introduzida no Problema de Valor de Contorno através da chamada **Condição de Kutta.**

$\nabla^2\phi(x,y) = 0$

$\nabla\phi(x,y) \cdot \vec{n}(x,y) = 0$ p/ $(x,y) \in S_B$

$\nabla\phi(x,y) = \vec{U}$ p/ $(x,y) \in S_\infty$

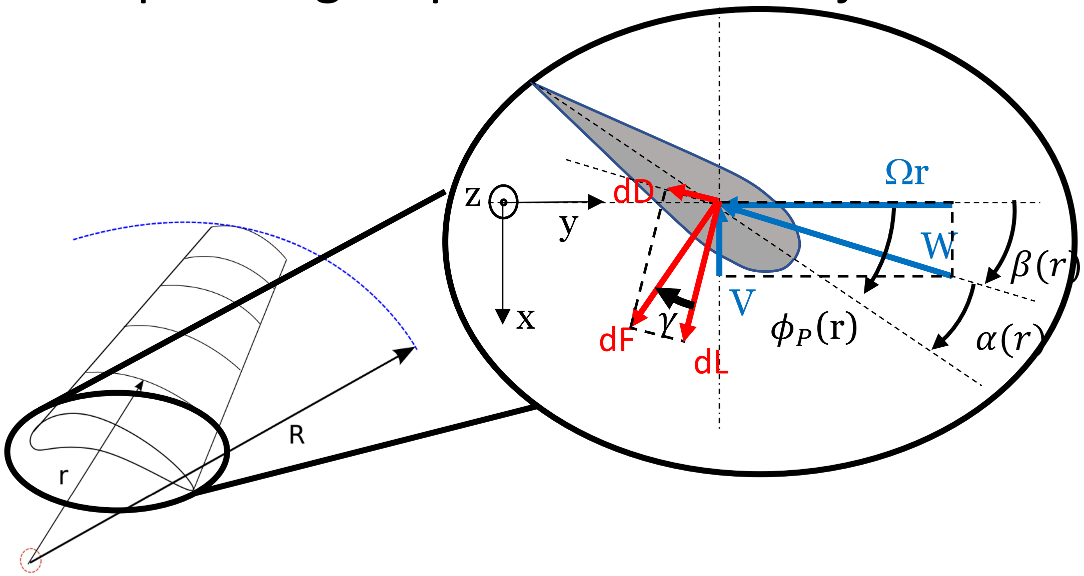
$\nabla\phi(x_F, y_F) = \vec{0}$ p/ (x_F, y_F)



PNV USP

Teoria do elemento de pá

Suponhamos, inicialmente, que a velocidade axial do escoamento que atinge o plano do disco seja uniforme



$$\beta(r) = atan\left(\frac{V}{\Omega r}\right)$$

$$\alpha(r) = \phi_P(\mathrm{r}) - \beta(r)$$

Ângulo característico do fólio

(mede eficiência hidrodinâmica)

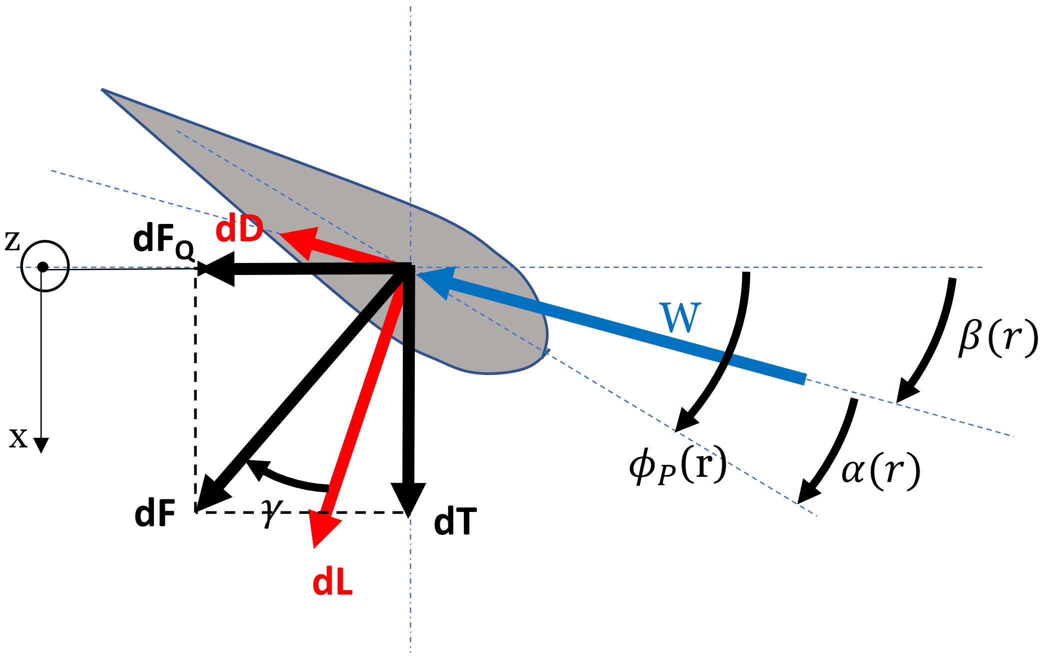
$$dL(r) = \frac{1}{2}\rho c W^2 C_L^{2D}(\alpha)\mathrm{dr}$$

$$dD(r) = \frac{1}{2}\rho c W^2 C_D^{2D}(\alpha)\mathrm{dr}$$

$$\gamma = atan\left(\frac{dD}{dL}\right) = atan\left(\frac{C_D^{2D}}{C_L^{2D}}\right)$$

PNV USP

Teoria do elemento de pá



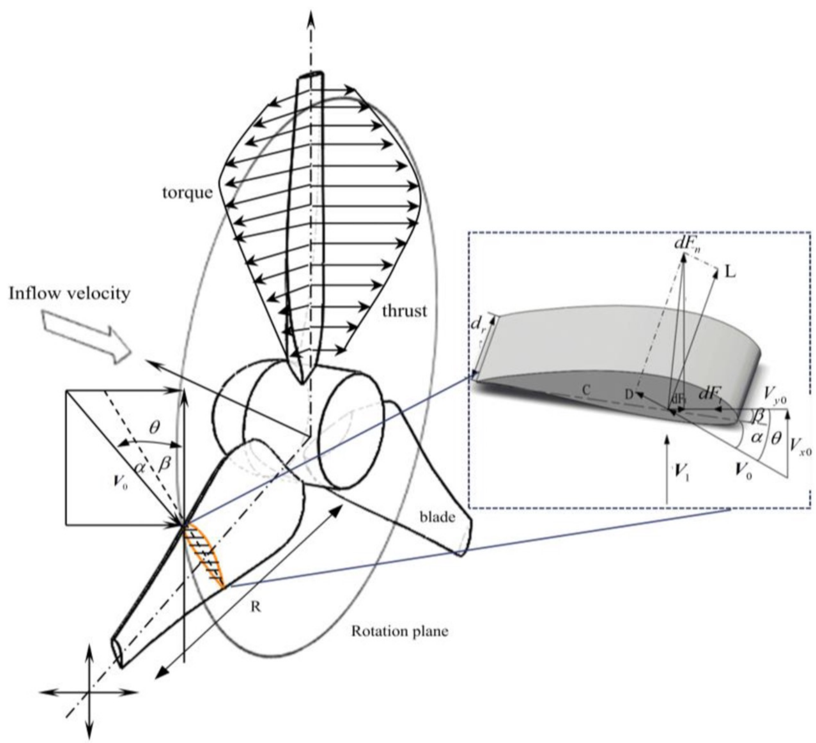
$$dT = dL\cos(\beta) - dD\sin(\beta)$$
$$dF_Q = dL\sin(\beta) + dD\cos(\beta)$$
$$dQ = r\,dF_Q$$

$$dT = \frac{1}{2}\rho c W^2 [C_L^{2D}(\alpha)\cos(\beta) - C_D^{2D}(\alpha)\sin(\beta)]dr$$

$$dQ = \frac{1}{2}\rho c r W^2 [C_L^{2D}(\alpha)\sin(\beta) + C_D^{2D}(\alpha)\cos(\beta)]dr$$

Teoria de Quantidade de Movimento do Elemento de Pá

BEMT = teoria resultante da união entre os modelos de disco atuador e elemento de pá.

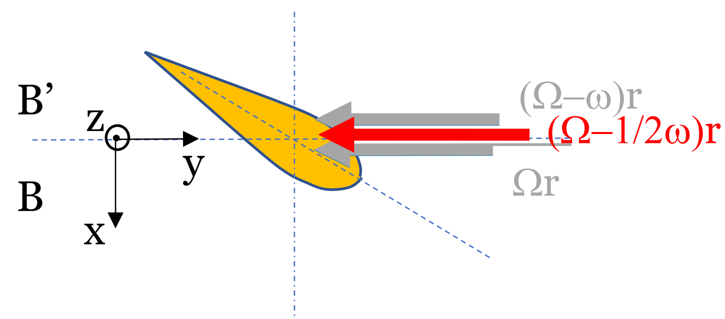


Velocidade axial (V):

$$V = V_B = V_{B'} = V_A(1 + a)$$

Velocidade angular, ω

$$\omega = 2a'\Omega$$



https://doi.org/10.3390/machines10040234

Teoria de Quantidade de Movimento do Elemento de Pá

Forças proporcionadas pelas N pás do rotor, devem coincidir com aquelas previstas para o anel elementar do disco propulsor:

$$NdT = \boxed{\frac{1}{2}\rho N c W^2 [C_L^{2D}(\alpha)cos(\beta) - C_D^{2D}(\alpha)sin(\beta)]dr} = \boxed{4\rho\pi r {V_A}^2 a(1-a)dr}$$

$$NdQ = \boxed{\frac{1}{2}\rho N c r W^2 [C_L^{2D}(\alpha)sin(\beta) + C_D^{2D}(\alpha)cos(\beta)]dr} = \boxed{4\rho\pi r^3 V_A \Omega a'(1-a)dr}$$

Elemento de pá

Disco atuador

- Sistema com duas equações e duas incógnitas (***a*, *a'***)
- Resolvido através de algoritmos iterativos, uma vez conhecidos:
  - (i) Geometria das pás;
  - (ii) Coeficientes dos fólios que compõe as pás ($C_L^{2D}(\alpha)$, $C_D^{2D}(\alpha)$);
  - (iii) V_A e Ω.

PNV USP