ESPAÇOS VETORIAIS — RESUMO

$V = \{\text{vetores}\}$ $\qquad \mathbb{R}$ - escalares

DEF: Um espaço vetorial V sobre o corpo dos números reais é um conjunto $V \neq \emptyset$ munido de duas operações:

$+$ Adição

$$V \times V \xrightarrow{+} V$$
$$(u, v) \longmapsto u+v$$

(A adição é uma função de $V \times V \longrightarrow V$ que a cada par de vetores (u, v) associa um novo vetor $u+v$.)

A adição deve satisfazer os axiomas a seguir:

A1 $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todos $u, v, w \in V$.
(Associativa)

A2 Para todos $u, v \in V$, $u+v = v+u$.
(Comutativa)

A3. Existe um elemento, que denotamos por 0, $0 \in V$ tq $u+0 = 0+u = u$ para todo $u \in V$.
(Existência do elemento neutro da adição.)

A4. Para todo $v \in V$, existe um elemento denotado por $-v \in V$ tq $v+(-v) = -v+v = 0$
(Existência do elemento oposto)

Observações

O elemento neutro é único.

Suponha que existe $0' \in V$ tal que $0'+v = v+0' = v$ para todo $v \in V$.

Então $\underbrace{0'+0}_{\substack{\| \\ 0}} = 0'$ ↳ pois 0 é elemento neutro

0 ↳ pois $0'$ também é neutro

Assim $0 = 0'$ provando que o elemento neutro é único.

Para todo $v \in V$, o oposto de v é único.

Seja $v \in V$ e v' tal que: $v + v' = v' + v = 0$

$$v' \underset{A3}{=} 0 + v' \underset{A4}{=} (-v+v)+v' \underset{A1}{=} -v+(v+v')$$

$$\underset{\text{Propriedade de } v'}{=} -v+0 \underset{A3}{=} -v. \qquad \text{Logo } v = v'$$

- Multiplicação por escalar

$\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$ (A multiplicação por um escalar é uma função que a cada par ordenado $(a, m) \in \mathbb{R} \times V$ associa um vetor denotado por av.)

$(a, v) \xmapsto{\cdot} av$

satisfazendo:

M1. $1v = v$ para todo $v \in \mathbb{R}$.

M2. $(a+b)v = av + bv$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

M3. $(ab)v = a(bv) = b(av)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$

M4. $a(u+v) = au + av$ para todos $a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$

PRIMEIRAS PROPRIEDADES DE UM ESPAÇO VETORIAL
(Propriedades que decorrem diretamente dos axiomas)

P1. Lei do Cancelamento da Adição. Sejam $u, v, w \in V$.

Se $\underbrace{u + v = u + w}_{\text{hipótese}}$ então $\underbrace{v = w}_{\text{tese}}$.

$$v \underset{A3}{=} 0 + v \underset{A4}{=} (-u+u) + v \underset{A1}{=} -u + (u+v)$$

$$\underset{\text{hipótese}}{=} -u + (u+w) \underset{A1}{=} (-u+u) + w \underset{A4}{=} 0 + w \underset{A3}{=} w.$$

P2. $0v = 0$ (o zero dos reais multiplicado por qualquer $v \in V$ é igual ao vetor nulo).

$a0 = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$ (qualquer escalar multiplicado pelo vetor nulo é o vetor nulo)

$$0v = (0+0)v \underset{M2}{=} 0v + 0v$$

Temos então $\underbrace{\cancel{0v} + 0}_{\text{usando } A3} = \cancel{0v} + 0v$

Por P1 (LCA) $0 = 0v$.

$$a0 = a(0+0) \underset{M4}{=} a0 + a0$$

$\cancel{a0} + 0 = \cancel{a0} + a0$. Por P1, $a0 = 0$. ∎

P3. $-av = (-a)v = a(-v)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$

Queremos mostrar que
$(-a)v$ = oposto de av, isto é,
que $av + (-a)v = 0$.

$$av + (-a)v \underset{M2}{=} (a + (-a))v = 0v \underset{P2}{=} 0$$

Mostrar que $a(-v) = -av$.

$$av + a(-v) \underset{M4}{=} a(v + (-v)) = a0 \underset{P2}{=} 0$$

P4. Tomando $a = 1 \in \mathbb{R}$ temos que
$$-v = (-1)v = 1(-v)$$
Basta usar M1.
$-v = -1v$ e agora usar P3.

P5. $-(-v) = v$ $\forall v \in V$

$$-(-v) \underset{M3 \text{ e } P4}{=} (-1)((-1)v) \underset{M3}{=} (-1)(-1)v = 1v = v$$

P6. Se $av = 0$, então $a = 0$ ou $v = 0$, ($a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$).

Se $a = 0$ — ok.

Suponha que $a \neq 0$ e $av = 0$.
Mostrar que $v = 0$.

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que
$a a^{-1} = 1 = a^{-1} a$.

Se $av = 0$ e $a \neq 0$
$$a^{-1}(av) = a^{-1} 0 \underset{P2}{=} 0$$

Mas $a^{-1}(av) \overset{M3}{=} (a^{-1}a)v \underset{M1}{=} 1v = v$.
Logo $v = 0$.

Exemplos de Espaços Vetoriais (para fixar a notação.)

Para definir um espaço vetorial temos que dizer qual é o conjunto V, quais são as duas operações. Para verificar que $(V,+,\cdot)$ é um espaço vetorial temos que mostrar que os 8 axiomas valem para a adição e multiplicação por escalar.

(1) $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$

$$\underbrace{(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)}_{\text{soma de n-uplas}} \overset{def}{=} (\underbrace{x_1+y_1}_{\text{soma em } \mathbb{R}},\dots,\underbrace{x_n+y_n}_{\text{soma em } \mathbb{R}})$$

$$\underbrace{a(x_1,\dots,x_n)}_{\text{multiplicação de uma n-upla por um escalar}} \overset{def}{=} (\underbrace{ax_1}_{\text{mult. de nºs reais}},\dots,ax_n)$$

Verifique os 8 axiomas.

(2) $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A$ matrizes de tamanho $m\times n$ com entradas reais$\}$.

operações $A+B$ adição de matrizes

$a.A$ multiplicação de matriz por um nº real.

(3) $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ X conjunto não vazio.

$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ é função$\}$

Operações: Adição de funções

$f,g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ Adição $f+g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\underbrace{(f+g)}_{\text{soma de funções}}(x) = f(x) \underbrace{+}_{\text{soma em } \mathbb{R}} g(x)$$

Multiplicação por escalar

$a \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

Definir a função af

$af : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\underbrace{(af)(x)}_{\text{mult. do escalar } a \text{ por } f} = \underbrace{af(x)}_{\text{mult. em } \mathbb{R}} \quad \forall\, x \in X.$$

Para mostrar as propriedades aqui precisamos usar IGUALDADE de funções.

Duas funções $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são iguais se $\varphi(a) = \psi(a)$ para todo $a \in A$ (A domínio de φ e ψ.)

Para mostrar que $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \Longrightarrow f+g = g+f$

Seja $x \in X$. Provar que $(f+g)(x) = (g+f)(x)$

$$(f+g)(x) \overset{\text{def de adição de funções}}{=} f(x) + g(x) \underset{\text{comutatividade da adição de } \mathbb{R}}{=} g(x) + f(x) \underset{\text{def de adição de funções.}}{=} (g+f)(x)$$

Elemento Neutro da Adição

$\mathfrak{z} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathfrak{z}(x) = 0 \ \forall x \in X$ (função constante igual a 0)

Mostrar que $f + \mathfrak{z} = f$ para toda $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$(f+\mathfrak{z})(x) \overset{\text{def de adição de funções}}{=} f(x) + \mathfrak{z}(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} = f(x)$$

Logo $f + \mathfrak{z} = f$, (pois elas coincidem em todo $x \in X$)

Oposto de $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Definimos $-f : X \to \mathbb{R}$ como sendo a função

$$(-f)(x) = -f(x)$$

oposto do número real $f(x)$

Então $f + (-f) = \mathcal{Z}$ pois

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$$

$$= f(x) + (-f(x)) = 0$$

para todo $x \in X$.

Prove os outros axiomas de nº reais.

(4) Polinômios com Coeficientes reais

$P_n(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \}$
$a_i \in \mathbb{R}$ e t é uma variável

(Um polinômio é uma soma
$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$

onde existe m tal que se $n > m$,
$a_n = 0$.

Isso diz que o grau de um polinômio é menor ou igual a m.

grau $(a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m) = m$ se $a_m \neq 0$
e $a_n = 0$ para todo $n > m$

Se $a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$, dizemos que o polinômio é NULO e seu grau não é definido.

Um polinômio de grau 0 é uma constante $a_0 \neq 0$.

Soma de polinômios

$f = a_0 + \dots + a_m t^m \qquad g = b_0 + \dots + b_m t^m$

$$f+g = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \dots + (a_m+b_m)t^m$$

Multiplicação de um polinômio por um escalar:

$$af = aa_0 + aa_1 t + \dots + aa_n t^n$$

EXERCÍCIO:

Mostre que $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Exercício 2(d) da Lista 3

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$

Definimos $\oplus : V \times V \longrightarrow V$ como

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

$\odot$ $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ como

$$a \odot (x,y) = (x^a, y^a)$$

Verificar se $(V, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial.

A1 $\big((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)\big)\oplus(x_3,y_3) = (x_1x_2, y_1y_2)\oplus(x_2,x_3)$

$= \big((x_1x_2)x_3, (y_1y_2)y_3\big) = \big(x_1(x_2x_3), y_1(y_2y_3)\big)$

↳ associativa do produto vale em $\mathbb{R}$

$= (x_1,y_1)\oplus(x_2x_3, y_2y_3) =$

$(x_1,y_1)\oplus\big((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3)\big)$

A2. $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) = (x_2x_1, y_2y_1) = (x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$

A3. Existência do elemento neutro

$0 = (1,1)$ pois $(x,y)\oplus(1,1) = (x,y)$

A4 Existência do oposto

$-(x,y) = (x^{-1}, y^{-1})$ pois $(x,y)\oplus(x^{-1},y^{-1})$

(observe que $x>0$ e $y>0$) $= (xx^{-1}, yy^{-1}) = (1,1) = 0.$

M1: $1\odot(x,y) = (x^1, y^1) = (x,y)$

M2: $(a+b)\odot(x,y) = (x^{a+b}, y^{a+b}) = (x^a x^b, y^a y^b)$

$= (x^a, y^a) \oplus (x^b, y^b) = a\odot(x,y) \oplus b\odot(x,y)$

M3 $(a\,b)\odot(x,y) = (x^{ab}, y^{ab}) = ((x^a)^b, (y^a)^b)$

$= b\odot(x^a, y^a) = b\odot(a\odot(x,y))$

M4 $a\odot((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)) = a\odot(x_1x_2, y_1y_2)$

$= ((x_1x_2)^a, (y_1y_2)^a) = (x_1^a x_2^a, y_1^a y_2^a)$

$= (x_1^a, y_1^a) \oplus (x_2^a, y_2^a) = a\odot(x_1,y_1) \oplus a\odot(x_2,y_2)$

Exercício 3 da Lista 3

(a) $u = (1,2,3,4)$ $\quad v = (-5,7,-6,8)$

$x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ $\quad y = (y_1,y_2,y_3,y_4)$

$$\begin{cases} x + 2y = u \\ 3x + 4y = v \end{cases}$$

Como $\mathbb{R}^4$ é espaço vetorial podemos resolver o sistema normalmente

$x = u - 2y$ (somo o oposto de $2y$ aos dois lados da primeira equação)

Substituo x na segunda equação

$3(u-2y)+4y = v$

$3u - 6y + 4y = v$ (usamos A4 e M2)

$-2y = v - 3u$ (usamos M2 e somamos $-3u$ aos dois lados)

$(-2)^{-1}(-2y) = (-2)^{-1}(v-3u)$

$y = -\frac{1}{2}v + \frac{3}{2}u$

$y = -\frac{1}{2}(-5,7,-6,8) + \frac{3}{2}(1,2,3,4) = (4, -\frac{1}{2}, \frac{15}{2}, 2)$

Faça $x = u - 2y$. (Você pode escalonar o sistema)

$au + bv = 0$

$a(1,2,3,4) + b(-5,7,-6,8) = (0,0,0,0)$

$$\begin{aligned} a - 5b &= 0 \\ 2a + 7b &= 0 \\ 3a - 6b &= 0 \\ 4a + 8b &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L4-4L1]{\substack{L2-2L1 \\ L3-3L1}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -21 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo $\begin{aligned} a - 5b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned} \Rightarrow a = b = 0.$

4. $u = (1,1)$ $v = (1,2)$ $w = (2,1)$

$a_1 u + b_1 v + c_1 w = a_2 u + b_2 v + c_2 w$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_1 + b_1 + 2c_1 &= a_2 + b_2 + 2c_2 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 &= a_2 + 2b_2 + c_2 \end{aligned}$$

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + 2(c_1 - c_2) = 0$$

$$(a_1 - a_2) + 2(b - b_2) + (c_1 - c_2) = 0$$

$$x = a_1 - a_2 \quad y = b_1 - b_2 \quad z = c_1 - c_2$$

Temos o sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y = z$$
$$x + y + 2z = 0 \qquad (-3z, z, z)$$
$$x = -3z \qquad \text{Solução do sistema}$$

Tome, por exemplo $a_1 = b_1 = c_1 = 1$

$$a_1 - a_2 = -3z \qquad b_1 - b_2 = z$$
$$-a_2 = -3z - 1 \qquad -b_2 = z - b_1$$
$$a_2 = 3z + 1 \qquad b_2 = 1 - z$$
$$b_3 = 1 - z \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

6 da Lista 3

$$f(x) = x^3 - x \qquad g(x) = x^2 + x$$

Suponha que $af + bg + c = 0$

Então, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$ax^3 - ax + bx^2 + bx + c = 0$$
$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + (b-a)x + c = 0 \quad (*)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $(*)$ vale $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos escolher valores arbitrários de x.

Se $x = 0 \Rightarrow c = 0$

Logo $(*)$ é apenas $ax^3 + bx^2 + (b-a)x = 0$

Se $x = 1$ $\quad a + b + (b-a) = 0$

$$\Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Ficamos então com

$$\underbrace{a(x^3 - x)}_{\text{esta NÃO é a função nula}} = 0 \Rightarrow a = 0$$

(Se quiser, pegue, por exemplo $x = 2$)
$$a(8-2) = 0$$
$$6a = 0$$
$$\Rightarrow a =$$