

O Problema de Fluxo Máximo

1 - Motivação e Exemplo Introdutório

A Figura 1 abaixo mostra um grafo orientado $G = (N, A)$ em que o nó s representa uma região produtora de soja e o nó t representa o porto exportador deste produto. Os arcos desta rede (grafo) representam a malha viária (hidrovia, ferrovia, rodovia) que poder ser utilizada para o transporte da soja. Para cada arco orientado (x, y) deste grafo há um parâmetro $c(x, y)$ que impõe um limite para o fluxo por unidade de tempo, $f(x, y)$; isto é $f(x, y) \leq c(x, y)$. Tal parâmetro é chamado de capacidade do arco (x, y) . As seguintes questões são pertinentes: Qual é o fluxo máximo que pode ser levado da região produtora de soja até o porto? Ele dará conta do volume previsto para a safra? Caso seja insuficiente, onde estão os gargalos da rede viária? O desenvolvimento que se faz a seguir fornece respostas para tais questões. O ponto de partida será a formulação do modelo matemático do problema de fluxo máximo para esse exemplo introdutório ilustrado na Figura 1.

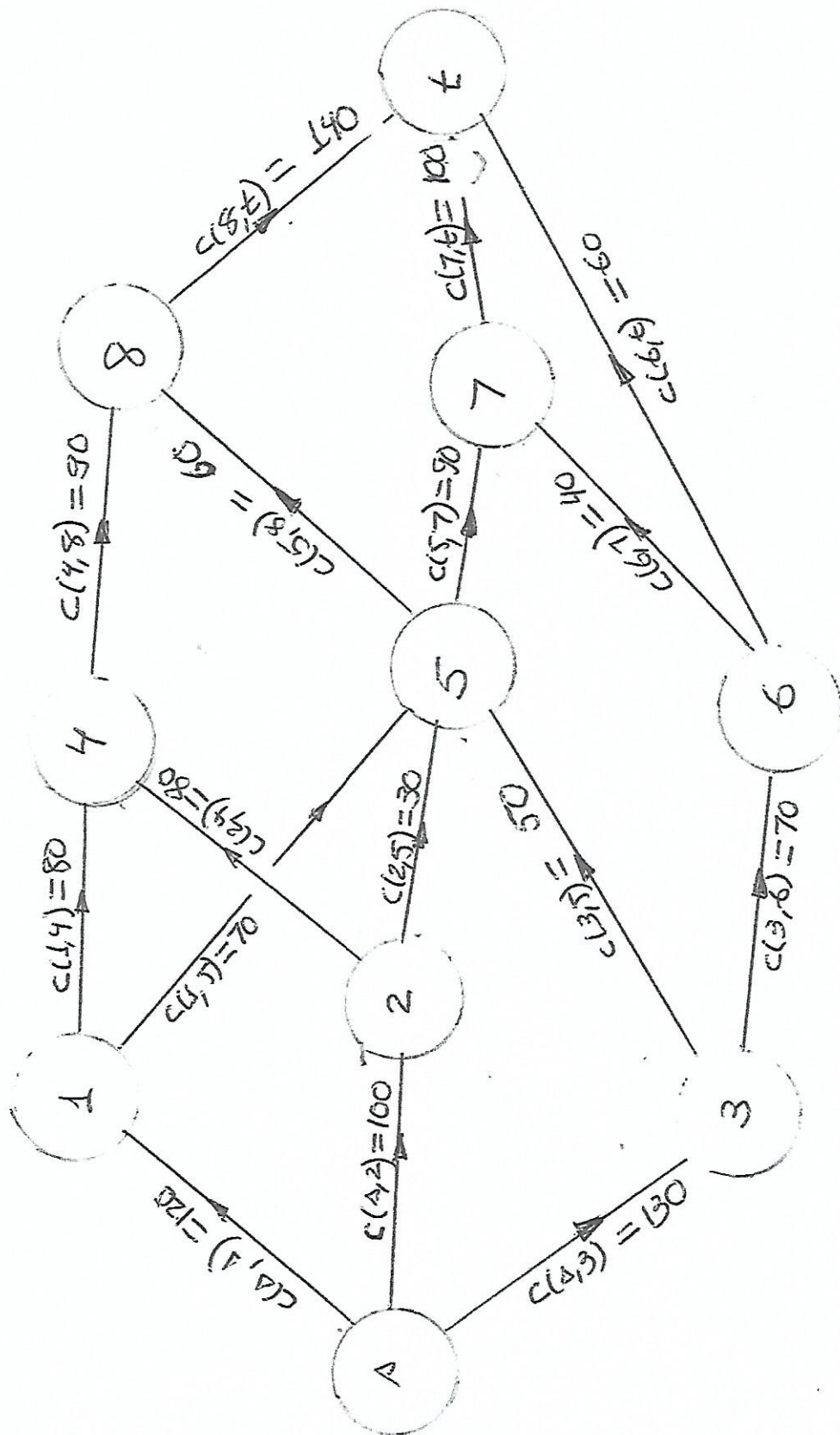


Figura 1 Malha viária capacitada ligando a região produtora de soja a ao porto exportador A.

Modelo Matemático

variáveis de decisão: sejam $f(x,y)$ o fluxo em cada arco orientado do grafo da Figura 1 e v o fluxo entre os nós 1 (região produtora) e 2 (porto exportador)

O modelo matemático é o seguinte:

maximizar v

sujeito às restrições

$$f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) = v$$

$$f(1,4) + f(1,5) - f(1,1) = 0$$

$$f(2,4) + f(2,5) - f(1,2) = 0$$

$$f(3,7) + f(3,6) - f(1,3) = 0$$

$$f(4,8) - f(1,4) - f(2,4) = 0$$

$$f(5,7) + f(5,8) - f(1,5) - f(2,5) - f(3,5) = 0$$

$$f(6,7) + f(6,8) - f(3,6) = 0$$

$$f(7,4) - f(5,7) - f(6,7) = 0$$

$$f(8,4) - f(4,8) - f(5,8) = 0$$

$$-f(6,8) - f(7,8) - f(8,8) = -v$$

$$0 \leq f(1,1) \leq 120$$

$$0 \leq f(1,2) \leq 100$$

$$0 \leq f(1,3) \leq 130$$

$$0 \leq f(1,4) \leq 80$$

$$0 \leq f(1,5) \leq 70$$

$$0 \leq f(2,4) \leq 80$$

$$0 \leq f(2,7) \leq 30$$

$$0 \leq f(3,7) \leq 50$$

$$0 \leq f(3,6) \leq 70$$

$$0 \leq f(4,8) \leq 90$$

$$0 \leq f(5,7) \leq 90$$

$$0 \leq f(5,8) \leq 60$$

$$0 \leq f(6,7) \leq 40$$

$$0 \leq f(6,8) \leq 60$$

$$0 \leq f(7,8) \leq 100$$

$$0 \leq f(8,t) \leq 140$$

As dez primeiras restrições correspondem ao balanço do fluxo em cada nó da rede; por convenção, adota-se sinal positivo para o fluxo saindo do nó e sinal negativo para o fluxo chegando ao nó. Assim, a primeira equação diz-se que o fluxo que sai do nó 1 é igual a v e a décima diz que o fluxo que chega ao nó t é igual a v ; as demais equações garantem que o fluxo que sai de qualquer nó intermediária é igual ao fluxo que a ele chega. As demais restri

ções estabelecem limites inferior e superior para o fluxo nos arcos da rede.

O sistema de equações desse problema de fluxo máximo tem semelhança com o do problema de transbordo; é como se o parâmetro b_i dos nós intermediários fosse nulo. No entanto, o lado direito das equações do nó s e do nó t não é um termo independente, mas uma variável. Cada fluxo $f(x,y)$ aparece duas vezes no sistema de equações: com coeficiente $+1$, na equação do nó origem x , e com coeficiente -1 , na equação do nó de destino y . Esse sistema de equações é redundante, como pode ser constatado pela soma de todas as equações.

Por sua natureza, o modelo matemático do problema de fluxo máximo, poderia ser resolvido por um algoritmo de programação linear, como o simplex, mas não é o algoritmo usualmente adotado para sua resolução.

2. O Problema Genérico de Fluxo Máximo e o Seu Modelo Matemático

Considere-se um grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$ com as seguintes características: para cada arco (x,y)

pertencente ao conjunto A_0 há um limite superior $c(x,y)$ para o fluxo $f(x,y)$, denominado capacidade do arco (x,y) ; no conjunto N , há dois nós particulares s , chamado de fonte, e t , chamado de sorvedouro. O problema de fluxo máximo corresponde a determinar qual é o maior fluxo que pode sair da fonte s e chegar ao sorvedouro t , atendendo as restrições de capacidade dos arcos da rede. O modelo matemático para um problema genérico é:

maximizar v
 sujeito as restrições

$$\sum_{\substack{x \\ (s,x) \in A_0}} f(s,x) - \sum_{\substack{y \\ (y,s) \in A_0}} f(y,s) = v \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{x \\ (r,x) \in A_0}} f(r,x) - \sum_{\substack{y \\ (y,r) \in A_0}} f(y,r) = 0 \quad \forall r \neq s, t \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{x \\ (t,x) \in A_0}} f(t,x) - \sum_{\substack{y \\ (y,t) \in A_0}} f(y,t) = -v \quad (3)$$

$$0 \leq f(x,y) \leq c(x,y), \text{ todo } (x,y) \in A_0 \quad (4)$$

À contrário do que foi visto no modelo matemático do problema milrodétrico, admite-se no caso genérico

que possa haver na rede arcos (y, s) chegando ao nó s e arcos (t, x) saindo do nó t

3. O Conceito de corte na rede separando a fonte s do sorvedouro t

Sejam X e Y dois subconjuntos disjuntos de N ; será utilizada a notação (X, Y) para designar o subconjunto de arcos de A_0 (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$. Isto é

$$(X, Y) = \{(x, y) \in A_0 : x \in X, y \in Y\}$$

Seja X um subconjunto de N contendo o nó s (fonte) e não contendo o nó t (sorvedouro) e seja $\bar{X}$ o seu complemento em N ; obviamente $\bar{X}$ contém o sorvedouro t (e não contém a fonte s). O conjunto de arcos $(X, \bar{X})$ é chamado de corte ^{no grafo} separando a fonte s do sorvedouro t .

Para uma melhor compreensão do conceito de corte no grafo separando a fonte s do sorvedouro t , será utilizado o exemplo introdutório. São exami-

dados, a seguir 3 cortes diferentes.

$$1 - X_1 = \{s\}, \bar{X}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, t\}$$

$$(X_1, \bar{X}_1) = \{(s, 1), (s, 2), (s, 3)\}$$

$$2 - X_2 = \{s, 1, 2, 3, 4\}, \bar{X}_2 = \{5, 6, 7, 8, t\}$$

$$(X_2, \bar{X}_2) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$3 - X_3 = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \bar{X}_3 = \{t\}$$

$$(X_3, \bar{X}_3) = \{(6, t), (7, t), (8, t)\}$$

A Figura 2 mostra estes 3 cortes, denotados por C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente. A capacidade de um corte separando a fonte s do sorvedouro t é igual a soma das capacidades dos arcos deste corte. Assim a capacidade do corte $(X_1, \bar{X}_1)$, denominada $c(X_1, \bar{X}_1)$ é

$$c(X_1, \bar{X}_1) = c(s, 1) + c(s, 2) + c(s, 3) = 350$$

Observe-se que, se os 3 arcos $(s, 1)$, $(s, 2)$ e $(s, 3)$ deste corte C_1 forem retirados do grafo, o fluxo entre a fonte s e o sorvedouro t será nulo.

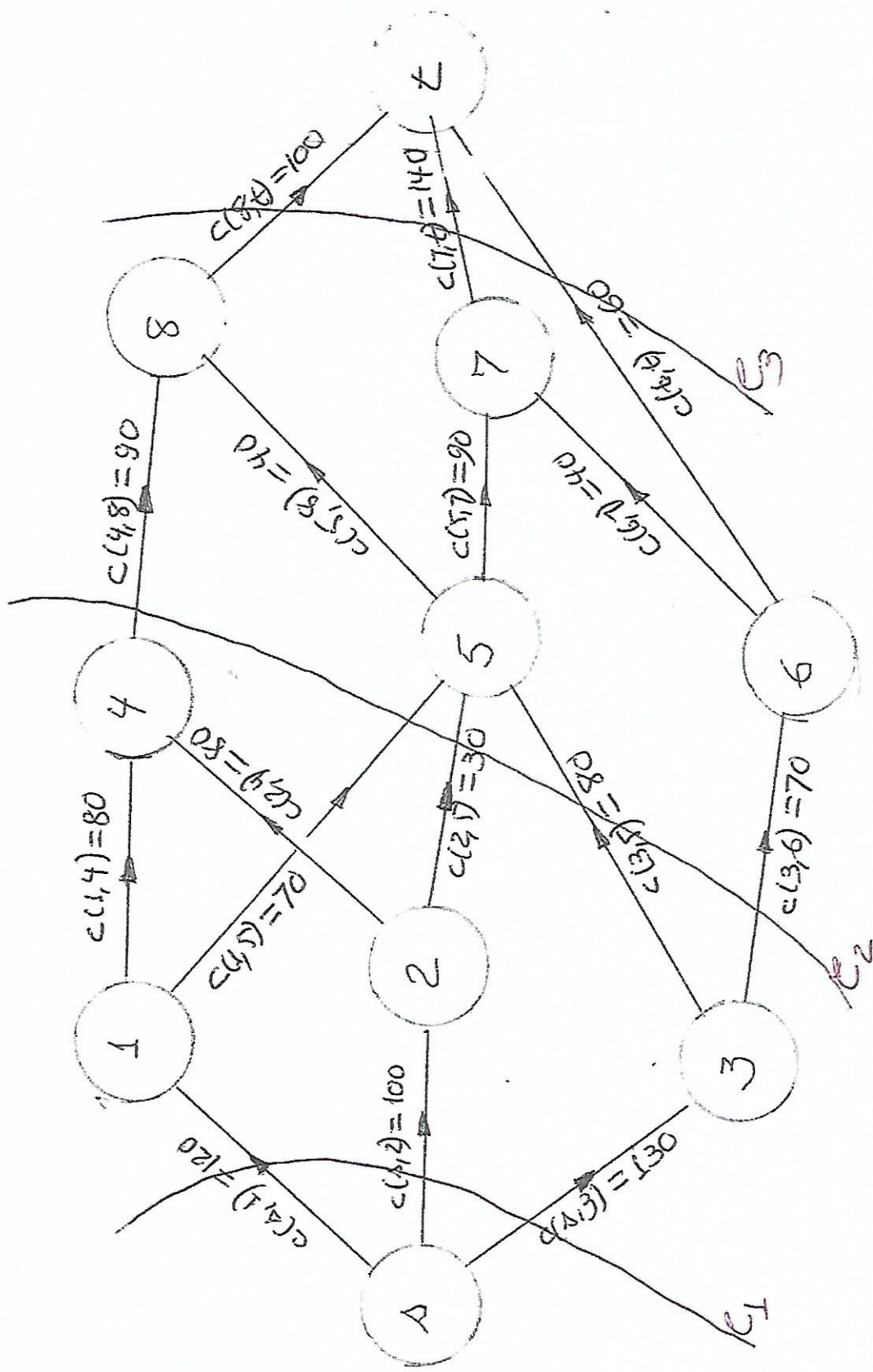


Figura 2 - Cortes C_1 , C_2 e C_3 separando a fonte A do sumidouro Z

Conclui-se, então, que para qualquer solução viável do modelo matemático do problema introdutório de fluxo máximo, apresentado nas páginas 3 e 4, o fluxo v da fonte s para o sorvedouro t não poderá ser maior que $c(X_1, \bar{X}_1) = 350$

O mesmo raciocínio se aplica aos cortes C_2 e C_3 ; o valor da capacidade de cada um desses cortes é:

$$c(X_2, \bar{X}_2) = c(1,5) + c(2,7) + c(3,7) + c(3,6) + c(4,8) = 340$$

$$c(X_3, \bar{X}_3) = c(6,t) + c(7,t) + c(8,t) = 300$$

Desta forma, cada corte no grafo orientado $G_0 = (N, A_0)$ separando a fonte s do sorvedouro t , impõe um limite superior para a quantidade do produto que pode ser transportada da fonte para o sorvedouro. A seguir serão formalizadas as relações entre capacidade de corte e o fluxo v entre a fonte s e o sorvedouro t .

4. Propriedades Relacionando Capacidade de Corte e o Fluxo v entre a Fonte s e o Sorvedouro t

4.1 Sejam $f(x,y), (x,y) \in A_0$ e v uma solução viável para o modelo matemático do problema de fluxo máximo apresentado na página 6 e $(X, \bar{X})$ um corte qualquer no grafo separando a fonte s do sorvedouro t . Então, $v \leq c(X, \bar{X})$

Demonstração

Faça a soma da equação 1 com as equações 2 para nós n pertencentes ao conjunto X . Para qualquer arco $(x, y) \in A_0$, com x e y pertencentes ao conjunto X , o fluxo $f(x, y)$ aparece com coeficiente $+1$ na equação do nó x e com coeficiente -1 na equação do nó y , não aparecendo no resultado dessa soma. Portanto, o resultado é:

$$\sum_{(x, \bar{x}) \in (X, \bar{X})} f(x, \bar{x}) - \sum_{(\bar{y}, y) \in (\bar{X}, X)} f(\bar{y}, y) = v \quad (5)$$

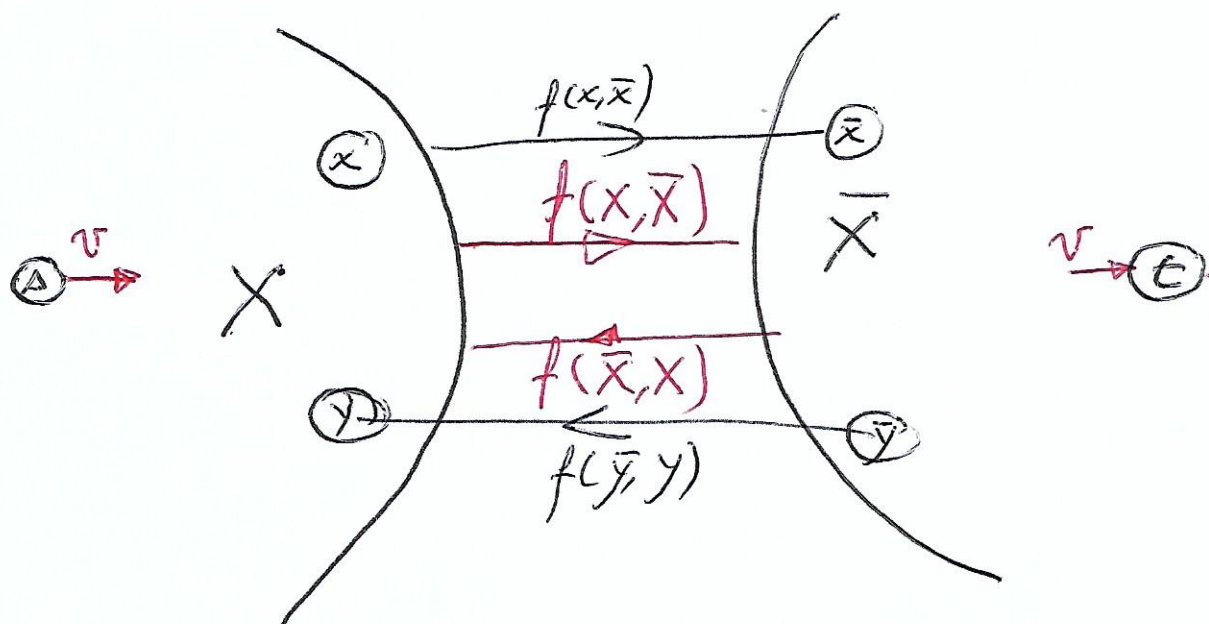
ou

$$f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) = v \quad (5')$$

Dado que $f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X})$ e $f(\bar{X}, X) \geq 0$, conclui-se que

$$v \leq c(X, \bar{X}) \quad (6)$$

A Figura 3 mostra, de forma esquemática, as variáveis envolvidas na equação (5').



$$v = f(x, \bar{x}) - f(\bar{x}, x) \leq c(x, \bar{x})$$

Figura 3 Fluxos do conjunto X para $\bar{X}$ e do conjunto $\bar{X}$ para o conjunto X

4.2 O fluxo máximo v^* entre a fonte s e o sorvedouro t é igual à capacidade mínima dos cortes $(X, \bar{X})$ separando s de t .

Demonstração

1 - A respeito da solução do modelo matemático do problema de fluxo máximo, representado pelas relações (1), (2), (3) e (4) da página 6, pode-se afirmar:

a) ele tem solução viável, dado que $f(x,y) = 0$, todo $(x,y) \in A_0$ e $v = 0$ é uma solução viável;

b) como de acordo com a propriedade anterior a função objetivo v é limitada superiormente pela capacidade de qualquer corte $(X, \bar{X})$ separando a fonte s do sorvedouro t , então o problema de fluxo máximo (PFM) tem solução ótima.

Sejam $f^*(x,y)$, $(x,y) \in A_0$ e v^* os valores correspondentes à solução ótima do PFM; o caminho para a demonstração é encontrar um corte $(X^*, \bar{X}^*)$ tal que

$$c(X^*, \bar{X}^*) = v^*$$

2. Construção do conjunto X^*

a) No início $X^* = \{s\}$

b) Passo 1

b₁ Se $(s,x) \in A_0$ e $f^*(s,x) < c(s,x)$, incluir x em X^*

b_2 Se $(y, s) \in \beta_0$ e $f^*(y, s) > 0$,
incluir y em X^*

c) Passo genérico - Seja $x \in X^*$ e considere nós ainda não pertencentes a X^* ligados ao nó x .

c_1) Se $y \notin X^*$ e $f^*(x, y) < c(x, y)$,
então incluir y no conjunto X^* ,

c_2) Se $z \notin X^*$ e $f^*(z, x) > 0$, então
incluir z no conjunto X^*

O processo de construção de X^* ^{termina} quando não há mais
nó a ser incluído no conjunto; o nó t não é
incluído no conjunto X^* . Caso o nó t viesse a
ser incluído em X^* , não seria obtido um corte
 $(X^*, \bar{X}^*)$ separando a fonte s do sorvedouro t .
Para provar que o nó t não é incluído no conjunto X^* e
será admitido que ele fosse colocado no conjunto X^* e
mostrada a contradição que tal hipótese gera.
De fato, se t é incluído no conjunto X^* , haverá
uma trajetória (não orientada)

$$\Delta \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \equiv t$$

em que cada nó x_{i+1} , $i+1 = 1, 2, \dots, n+1$ foi
incluído no conjunto pelo processo de construção
a partir do nó x_i . Desta forma, caso se
trate de um arco denominado direto (x_i, x_{i+1}) ,
 $f^*(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1})$. Em caso contrário,

se há o arco dito reverso (x_{i+1}, x_i) , então
 $f^*(x_{i+1}, x_i) > 0$. Sejam, então:

$$\varepsilon_1 = \min_{\text{arcos diretos}} \{ c(x_i, x_{i+1}) - f^*(x_i, x_{i+1}) \}$$

e
$$\varepsilon_2 = \min_{\text{arcos reversos}} \{ f^*(x_{i+1}, x_i) \}$$

e
$$\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$$

Some-se, então, ε aos fluxos $f^*(x_i, x_{i+1})$ em todos os arcos diretos e reduza-se de ε os fluxos em todos os arcos reversos (x_{i+1}, x_i) .

Com tal procedimento, continuam sendo satisfeitas as restrições (2), para os nós intermediários da rede, e (4), para os arcos da rede, do modelo matemático do problema de fluxo máximo, e há um aumento de ε no fluxo saído do nó fonte s e no fluxo chegando ao nó sorvedouro t . É isto o que se quer. A figura 4 ilustra a argumentação acima, mostrando a trajetória, com arcos diretos e reversos desde o nó fonte s até o sorvedouro t .

Depois de mostrar que t não pertence a X^* , falta mostrar que a capacidade do corte $(X^*, \bar{X}^*)$ é igual ao fluxo máximo v^* . Para tanto, convém

salientar que pelo processo de construção do conjunto X^* :

1 - para todo arco $(x, \bar{x}) \in (X^*, \bar{X}^*)$,

$$f^*(x, \bar{x}) = c(x, \bar{x}) ;$$

2 - para todo arco $(\bar{y}, y) \in (\bar{X}^*, X^*)$

$$f^*(\bar{y}, y) = 0$$

isto é :

$$f^*(X^*, \bar{X}^*) = c(X^*, \bar{X}^*) \quad (7)$$

e

$$f^*(\bar{X}^*, X^*) = 0 \quad (8)$$

Observando que a equação (5) se aplica para qualquer condição de fluxo viável e para qualquer corte separando a fonte s do sorvedouro t , para a condição de fluxo máximo e para o corte $(X^*, \bar{X}^*)$, obtém-se o resultado

$$f^*(X^*, \bar{X}^*) - f^*(\bar{X}^*, X^*) = c(X^*, \bar{X}^*) = v^* \quad (9)$$

A figura 5 mostra, de forma esquemática, um corte de capacidade mínima. O processo de construção acima descrito encontra um corte de capacidade mínima, mas pode haver outros. Sendo assim, pode ser que um investimento para ampliar a capacidade de algum dos arcos do corte encontrado $(X^*, \bar{X}^*)$ não gere aumento do fluxo entre a fonte e o sorvedouro.

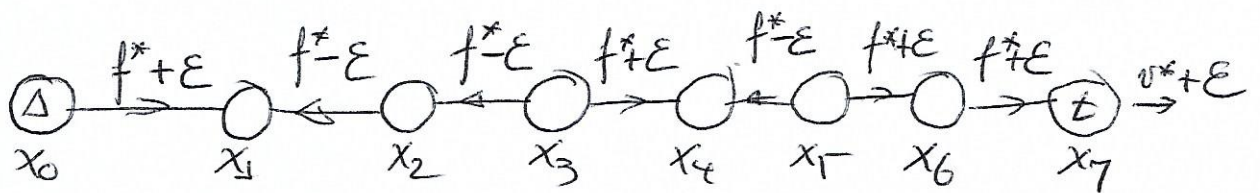


Figura 4 Trajetória hipotética, com arcos diretos e arcos reversos para o aumento do fluxo entre s e t

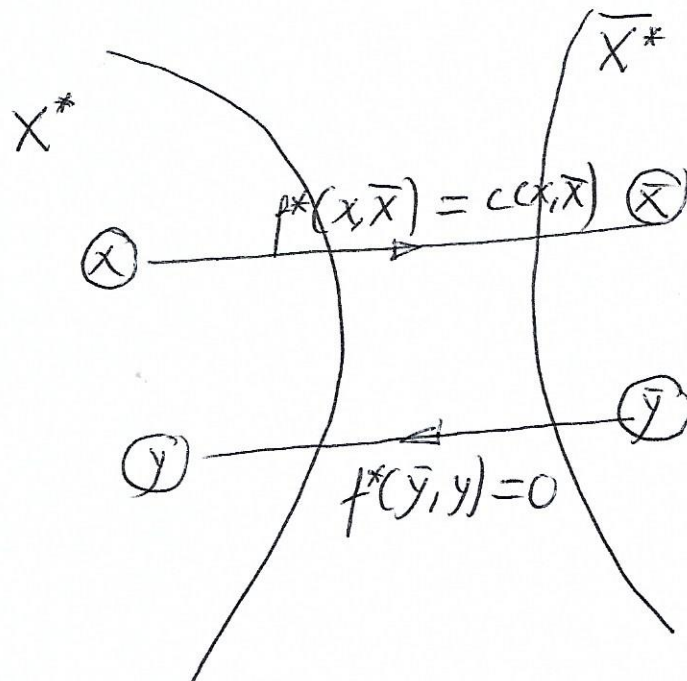


Figura 5 Ilustração esquemática dos fluxos de x^* para $\bar{x}^*$ e de $\bar{x}^*$ para x^* quando $(x^*, \bar{x}^*)$ é um corte de capacidade mínima.

Conviém apresentar um último comentário com respeito à demonstração dessa segunda propriedade.

Não obstante, a trajetória $s \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \equiv t$ no caso seja hipotética, o conceito de trajetória de aumento de fluxo entre a fonte s e o sorvedouro t é peça fundamental do algoritmo de Ford-Fulkerson para determinação do fluxo máximo entre s e t .

Os valores de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ são atualizados sequencialmente até chegar ao nó t , durante a rotina de geração de etiquetas.

5 Algoritmo de Ford-Fulkerson para determinação do fluxo máximo entre os nós s e t de um grafo orientado.

O algoritmo de Ford-Fulkerson para determinação do fluxo máximo entre os nós s (fonte) e t (sorvedouro) é constituído por duas rotinas que interagem conforme se observa na Figura 6: rotina de geração de etiquetas para os nós da rede e rotina de mudança de fluxo nos arcos da rede. Na primeira rotina, busca-se, a cada iteração, encontrar uma trajetória de aumento de fluxo, partindo do nó fonte s e chegando ao nó t (sorvedouro). Trata-se de uma trajetória $s \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \equiv t$, como a mencionada anteriormente na demonstração da pro-

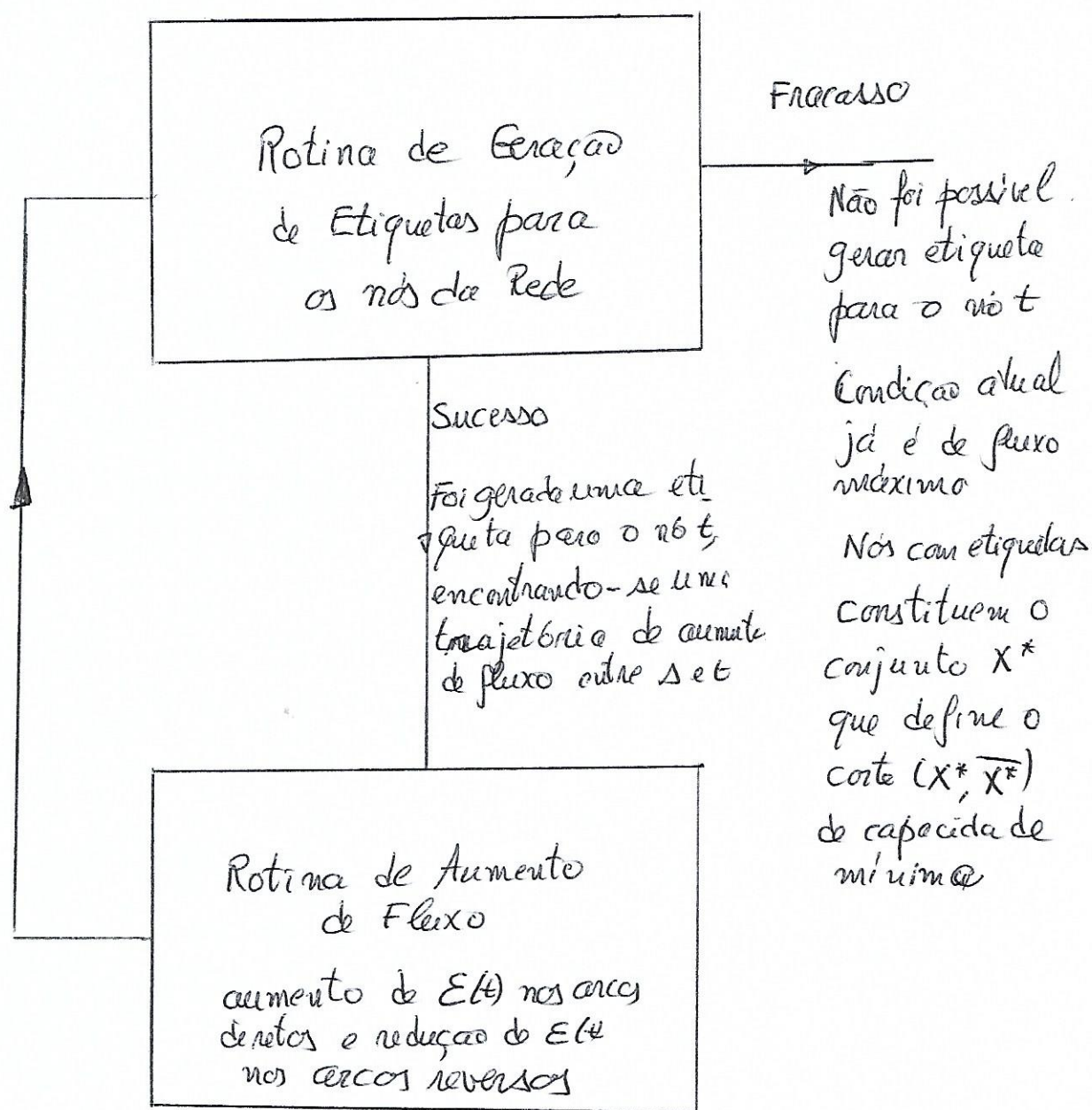


Figura 6 As rotinas do algoritmo de Ford-Fulkerson para determinação do fluxo máximo entre o fonte e o sorvedouro de um grafo orientado

puerda de 2, da pode conter arcos diretos (x_i, x_{i+1}) e arcos reversos (x_{i+1}, x_i) . O processo de geração de etiquetas é o instrumento utilizado na busca de uma trajetória de aumento de fluxo; ele tem sucesso, numa dada iteração, quando é possível atribuir uma etiqueta ao nó t , e fracassa quando não é possível gerar tal etiqueta. Em caso de sucesso, passa-se para a rotina de mudança de fluxo nos arcos da trajetória identificada: aumento de fluxo nos arcos diretos e redução de fluxo nos arcos reversos. Em caso de fracasso, os fluxos atuais correspondem a uma solução ótima e o conjunto de nós com etiquetas na iteração mal sucedida, X^* , define um corte de capacidade mínima $(X^*, \bar{X}^*)$. A seguir, são executadas cada uma dessas rotinas.

Rotina de Geração de Etiquetas para os Nós

1. O nó A recebe a etiqueta $(-, \infty)$, indicando que não há antecessor para ele na trajetória de aumento de fluxo e que até ele não há redução para o aumento de fluxo na rede.

2. Geração de etiquetas a partir do nó A

2a) Considere todo nó x para o qual exista o arco (s, x) e tenha $f(s, x) < c(s, x)$; atribua ao nó x a etiqueta $(s^+, E(x) = c(s, x) - f(s, x))$. O parâmetro $E(x)$ indica qual é o aumento possível de fluxo desde o nó s até o nó x ; s^+ indica que, na trajetória de aumento de fluxo que se busca construir, o antecedente do nó x é o nó s , por meio de um arco direto (s, x) .

2b) Considere todo nó y para o qual exista o arco (y, s) , no qual $f(y, s) > 0$; atribua ao nó y a etiqueta $(s^-, E(y) = f(y, s))$. O parâmetro $E(y)$ indica qual é o aumento possível de fluxo desde o nó s até o nó y (obtido às custas da redução do fluxo $f(y, s)$); s^- indica que, na trajetória de aumento de fluxo que se busca construir, o antecedente do nó y é o nó s , mediante um arco reverso (y, s) .

A Figura 7 ilustra o procedimento para a geração de etiquetas a partir do nó s (fonte).

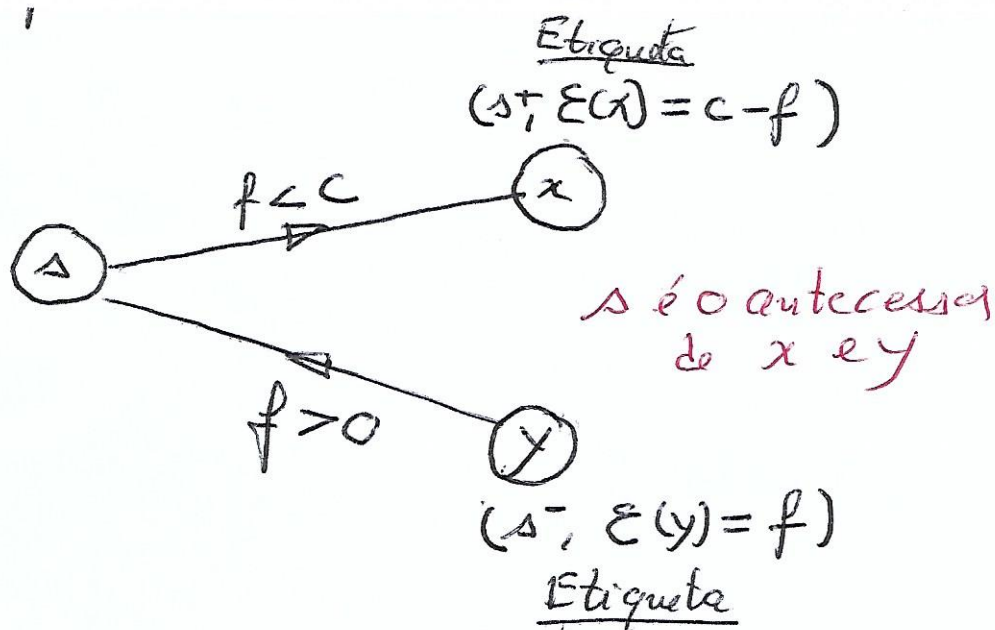


Figura 7 Ilustração esquemática da geração de etiquetas a partir da fonte s .

3. Geração de etiquetas a partir de um nó genérico z já etiquetado

3a) Considere todo nó não etiquetado x para o qual exista o arco orientado (z, x) , no qual $f(z, x) < c(z, x)$. Atribua ao nó x a etiqueta $(z^+, E(x) = \min\{E(z), c(z, x) - f(z, x)\})$. O parâmetro $E(x)$ indica qual é o possível aumento de fluxo desde a fonte s até o nó x , na trajetória de aumento de fluxo que se busca construir; a etiqueta informa ainda que o antecedente do nó x é o nó z , por meio de um arco direto (z, x) .

3b) Considere todo nó não etiquetado y para o qual exista o arco (y, z) , no qual $f(y, z) > 0$. Atribua ao nó z a etiqueta $(z^+, E(y)) = \min\{E(z), f(y, z)\}$. O parâmetro $E(y)$ indica qual é o aumento possível de fluxo desde a fonte s até o nó y numa trajetória de aumento de fluxo que se busca construir; a etiqueta informa ainda que o antecendente do nó y , na trajetória que se busca construir, é o nó z , por meio de um arco reverso (y, z) .

A Figura 8 ilustra o procedimento para a geração de etiquetas a partir de um nó genérico z .

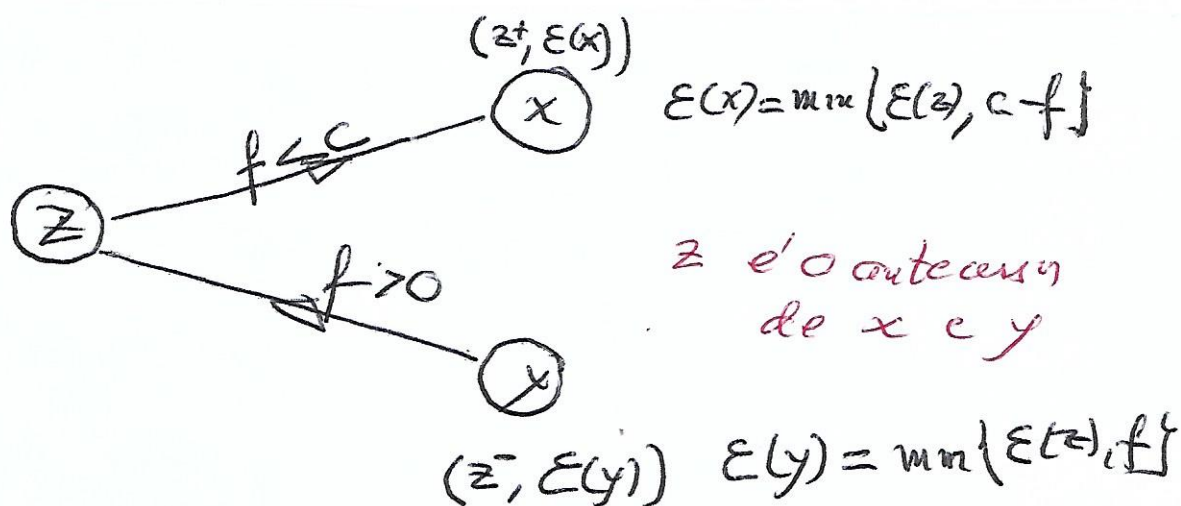


Figura 8 Ilustração esquemática da geração de etiquetas a partir de um nó genérico z .

Rotina de Aumento de Fluxo

Enquanto a rotina de geração de etiquetas começa a partir do nó s , com o objetivo de construir uma trajetória de aumento de fluxo $s, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t$, a rotina de alteração dos fluxos nos arcos da trajetória começa a partir do nó t .

- 1a) Caso o nó t tenha recebido a etiqueta $(x^+, \varepsilon(t))$, aumente o fluxo no arco (x, t) de $f(x, t)$ para $f(x, t) + \varepsilon(t)$.
- 1b) Caso o nó t tenha recebido a etiqueta $(x^-, \varepsilon(t))$, reduza o fluxo no arco (t, x) de $f(t, x)$ para $f(t, x) - \varepsilon(t)$.

Depois de atualizar o fluxo que chega ao nó t , passa-se a atualizar o fluxo que chega ao nó x , examinando-se sua etiqueta para buscar o seu antecederente na trajetória de aumento de fluxo.

- 2a) Caso o nó x tenha recebido a etiqueta $(y^+, \varepsilon(x))$, aumente o fluxo no arco (y, x) de $f(y, x)$ para $f(y, x) + \varepsilon(x)$.
- 2b) Caso o nó x tenha recebido a etiqueta $(y^-, \varepsilon(x))$, reduza o fluxo no arco (x, y) de $f(x, y)$ para $f(x, y) - \varepsilon(x)$.

Tal procedimento é repetido, sucessivamente, até chegar ao nó s .

6 - Aplicação do Algoritmo Ford-Fulkerson

O algoritmo de Ford-Fulkerson pode ser aplicado a partir de qualquer configuração de fluxo viável na rede; a configuração mais trivial é $f(x, y) = 0$ para todo arco $(x, y) \in A_0$. Com o intuito de reduzir o número de iterações e de gerar diferentes tipos de trajetórias de aumento de fluxo, adota-se a seguinte configuração viável de fluxo na rede para aplicação do algoritmo de Ford-Fulkerson:

$$\begin{aligned} f(s, 1) &= f(1, 4) = f(4, 8) = f(8, t) = 80 \\ f(s, 2) &= f(2, 5) = f(5, 7) = f(7, t) = 30 \\ f(s, 3) &= f(3, 6) = f(6, t) = 60 \end{aligned}$$

$$\text{com } v = 170$$

A Figura 9 ilustra esta configuração inicial de fluxo na rede; a Tabela 1 mostra as iterações das rotinas de geração de etiquetas e de aumento do fluxo entre s e t . As mudanças de fluxo são lançadas na Figura 6

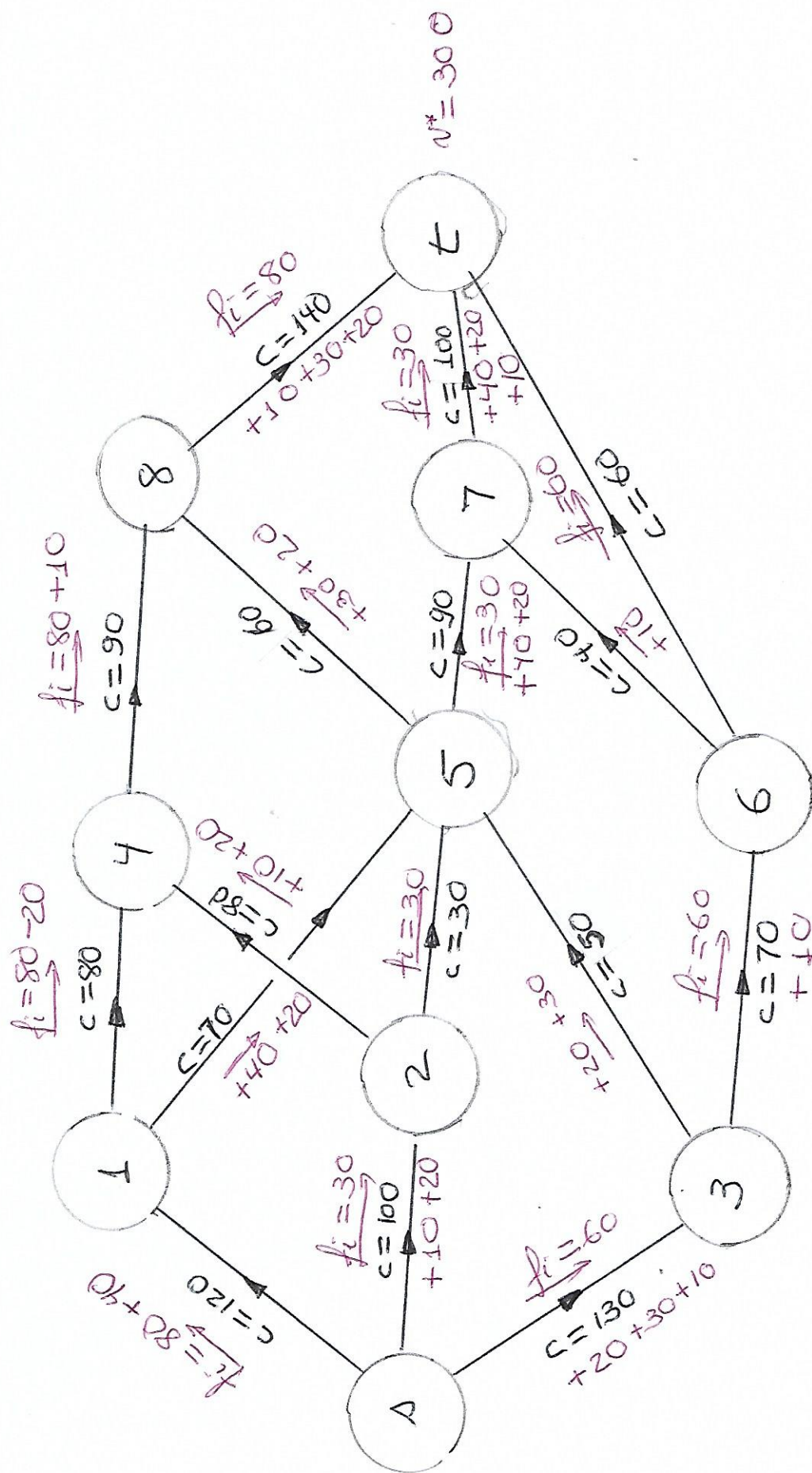


Figura 9 Carregamento inicial da rede, fluxos f_i , e aumentos de fluxos guardados pelas iterações do algoritmo de Ford-Fulkerson

Tabela 1 - Iterações das Rotinas do Algoritmo Ford-Fulkerson

1ª Iteração		2ª Iteração	
Nós	Etiquetas	Nós	Etiquetas
+40 ↘ 1	(-, ∞)	+10 ↘ 1	(-, ∞)
+40 ↘ 2	(1 ⁺ , 40)	+10 ↘ 2	(1 ⁺ , 70)
+40 ↘ 3	(1 ⁺ , 70)	+10 ↘ 3	(1 ⁺ , 70)
+40 ↘ 4	(1 ⁺ , 70)	4	(2 ⁺ , 70)
+40 ↘ 5	(1 ⁺ , 40)	5	(3 ⁺ , 50)
+40 ↘ 6	(2 ⁺ , 70)	6	(3 ⁺ , 10)
+40 ↘ 7	(3 ⁺ , 10)	1	(4 ⁻ , 70)
+40 ↘ 8	(5 ⁺ , 40)	8	(4 ⁺ , 10)
+40 ↘ t	(5 ⁺ , 40)	+10 ↘ 7	(5 ⁺ , 20)
		+10 ↘ t	(8 ⁺ , 10)
$N = 210$		$N = 220$	
3ª Iteração		4ª Iteração	
Nós	Etiquetas	Nós	Etiquetas
+20 ↘ 1	(-, ∞)	+20 ↘ 1	(-, ∞)
+20 ↘ 2	(1 ⁺ , 60)	+20 ↘ 2	(1 ⁺ , 60)
+20 ↘ 3	(1 ⁺ , 70)	+30 ↘ 3	(1 ⁺ , 50)
+20 ↘ 4	(2 ⁺ , 60)	+30 ↘ 4	(2 ⁺ , 60)
+20 ↘ 5	(3 ⁺ , 50)	+30 ↘ 5	(3 ⁺ , 30)
+20 ↘ 6	(3 ⁺ , 10)	+30 ↘ 6	(3 ⁺ , 10)
+20 ↘ 1	(4 ⁻ , 60)	+30 ↘ 1	(4 ⁻ , 60)
+20 ↘ 7	(5 ⁺ , 20)	+30 ↘ 8	(5 ⁺ , 30)
+20 ↘ 8	(5 ⁺ , 50)	+30 ↘ 7	(6 ⁺ , 10)
+20 ↘ t	(7 ⁺ , 20)	+30 ↘ t	(8 ⁺ , 30)
$N = 240$		$N = 270$	

Tabela 1 Iterações das Rotinas do Algoritmo Ford-Fulkerson

5ª Iteração		6ª Iteração	
Nós	Etiquetas	Nós	Etiquetas
Δ	$(-, \infty)$	Δ	$(-, \infty)$
+10 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$(\Delta^+, 60)$ $(\Delta^+, 20)$	+20 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$(\Delta^+, 60)$ $(\Delta^+, 10)$
+10 $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 6 \end{array} \right.$	$(2^+, 60)$ $(3^+, 10)$	-20 $\left\{ \begin{array}{l} 4 \end{array} \right.$	$(2^+, 60)$
+10 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 7 \end{array} \right.$	$(4^-, 60)$ $(6^+, 10)$	+20 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right.$	$(4^-, 60)$ $(1^+, 30)$
+10 $\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ t \end{array} \right.$	$(1^+, 30)$ $(7^+, 10)$	+20 $\left\{ \begin{array}{l} 8 \\ t \end{array} \right.$	$(5^+, 30)$ $(8^+, 20)$
$N = 280$		$N = 300$	

7ª Iteração		Na sétima iteração não foi possível gerar uma etiqueta para o nó t; o conjunto de nós com etiquetas constitui o conjunto X^* e o corte $(X^*, \bar{X}^*)$ tem capacidade mínima igual a v^*
Nós	Etiquetas	
Δ	$(-, \infty)$	
2	$(\Delta^+, 40)$	
3	$(\Delta^+, 10)$	
4	$(2^+, 40)$	
1	$(4^-, 40)$	
5	$(1^+, 10)$	
8	$(5^+, 10)$	

Dado que na 7ª iteração não foi possível atribuir uma etiqueta a nó t e, assim, obter uma trajetória de aumento de fluxo entre a fonte s e o sorvedouro t , o fluxo v obtido na 6ª iteração é o fluxo máximo, $v^* = 300$. O conjunto de nós com etiquetas na iteração 7 é o conjunto X^* , tal que $c(X^*, \bar{X}^*) = v^*$, isto é $(X^*, \bar{X}^*)$ é um corte de capacidade mínima. De fato,

$$X^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

$$\bar{X}^* = \{6, 7, t\}$$

$$(X^*, \bar{X}^*) = \{(3, 6), (5, 7), (8, t)\}$$

Portanto,

$$c(X^*, \bar{X}^*) = c(3, 6) + c(5, 7) + c(8, t) =$$

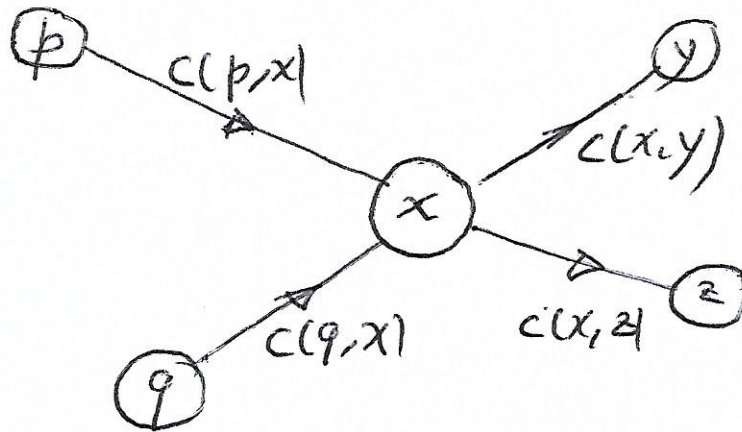
$$70 + 90 + 140 = 300 = v^*$$

Este corte de capacidade mínima foi identificado pelo algoritmo de Ford-Fulkerson; será que há outros?

7. Variantes do Problema de Fluxo Máximo

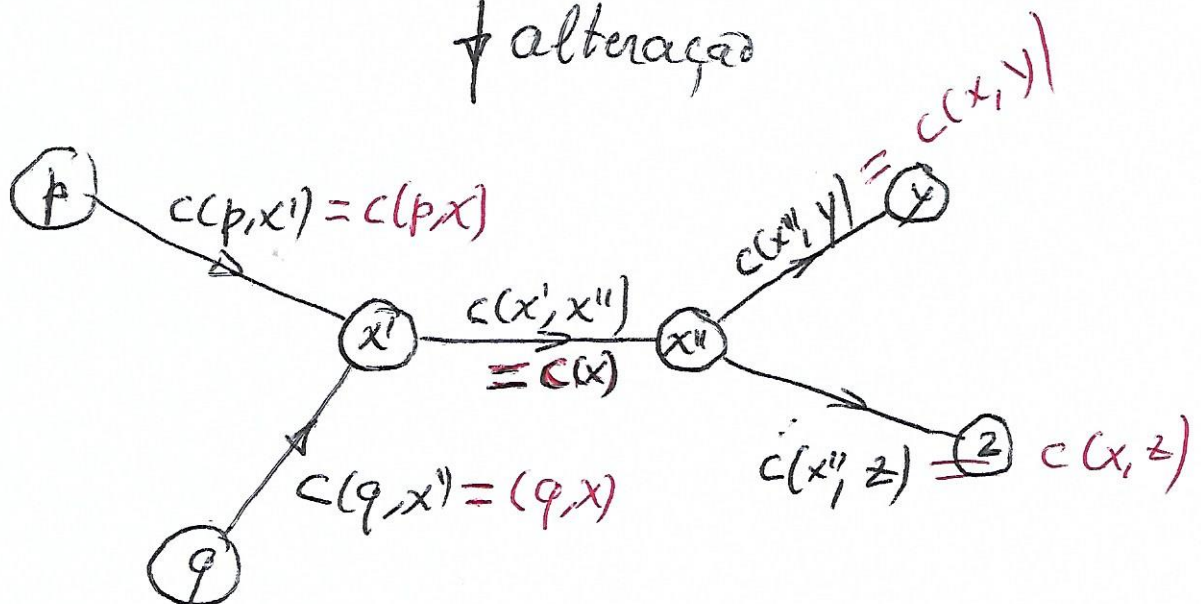
7.1 Restrição de capacidade em nós da rede orientada

Admita-se que um nó x de um grafo orientado, sobre o qual o problema de fluxo máximo é definido, seja um entroncamento hidro-ferroviário. A carga tem que ser transferida, por meio de equipamentos apropriados, de um modal para o outro, e este terminal de transbordo tem uma determinada capacidade de movimentação de carga. Seja $c(x)$, então, o limite ao fluxo pelo nó x imposto pelos equipamentos do terminal. A questão que se coloca é como incorporar essa nova restrição com o algoritmo de Ford-Fulkerson desenvolvido para o caso em que somente há restrições de capacidade para os arcos (x, y) da rede. A solução é relativamente simples: basta alterar o grafo, conforme indicado na figura abaixo. O nó x é



Configuração original

↓ alteração



Configuração modificada

Modificação na rede original para tratamento da restrição de capacidade nos nós.

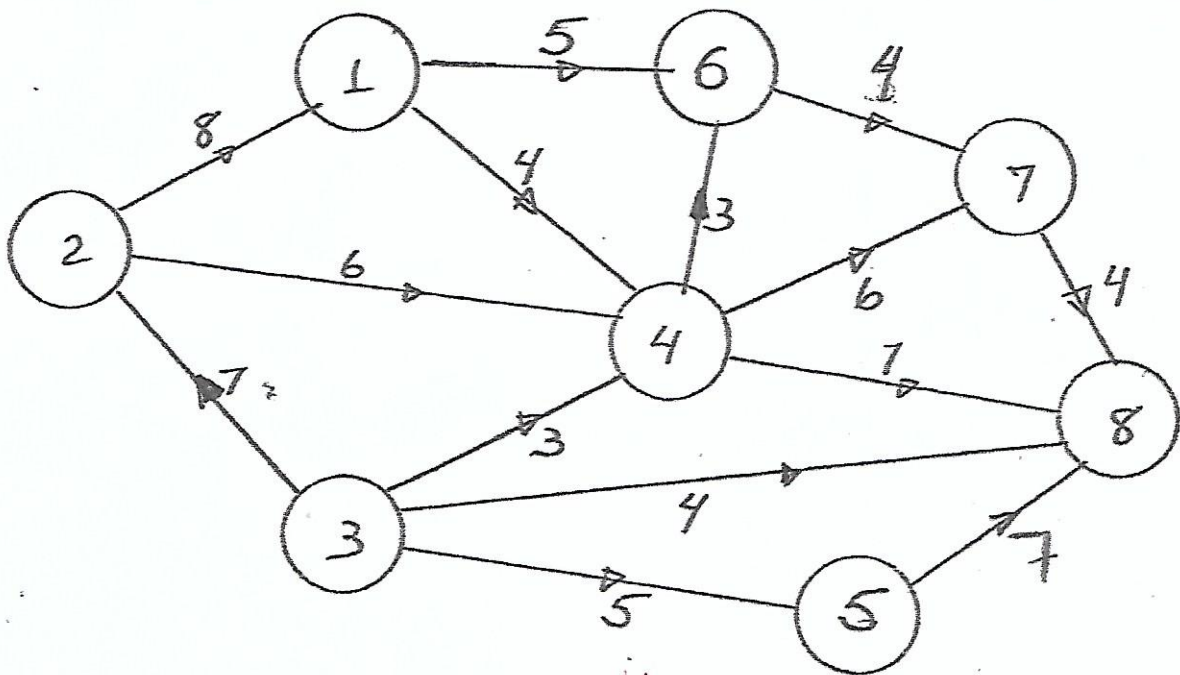
desmembrado em dois nós x' e x'' , ligados por um arco orientado (x', x'') . A capacidade do arco (x', x'') , $c(x', x'')$ é igual a $c(x)$;

os arcos que, na configuração original, chegam ao nó x , na configuração modificada chegam ao nó x' , mantendo as capacidades originais, isto é $c(p, x) = c(p, x')$, $c(q, x) = c(q, x')$;
os arcos com origem no nó x na configuração original passam a ter origem no nó x'' , mantendo também as capacidades originais, isto é $c(x'', y) = c(x, y)$, $c(x'', z) = c(x, z)$.

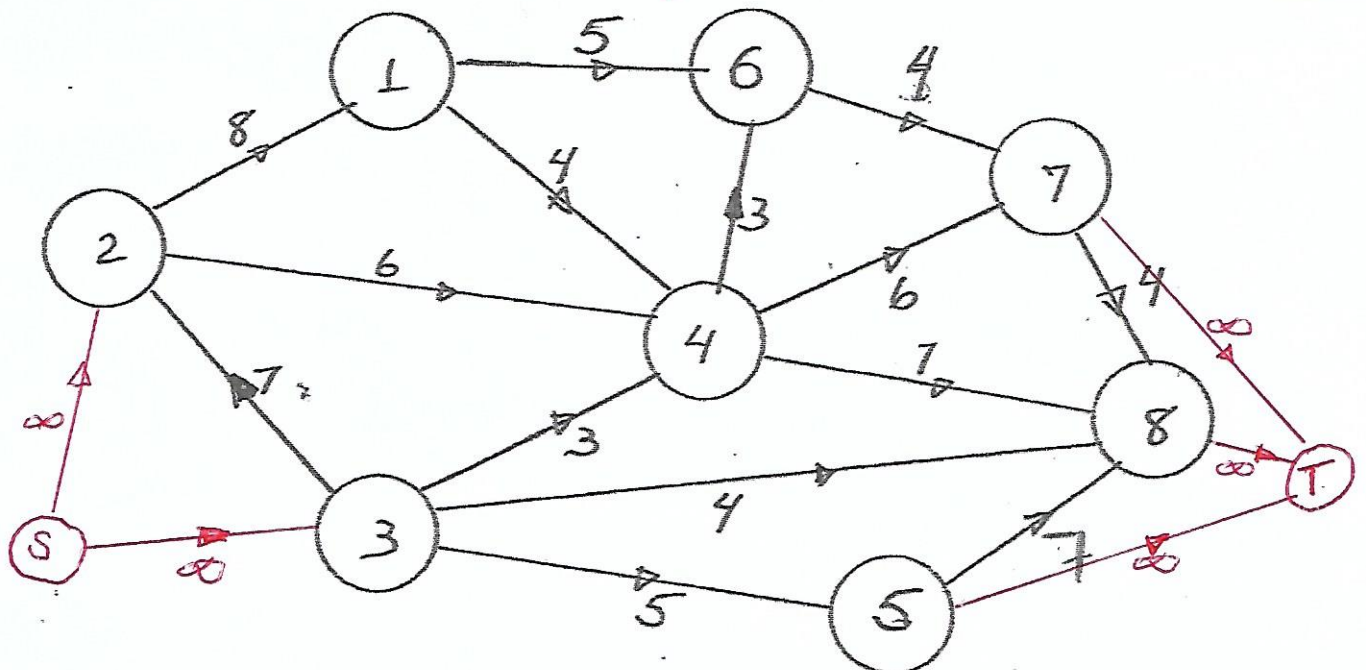
7.2 Mais de uma Fonte e/ou Mais de um Sorvedouro

Motivação A figura abaixo mostra um grafo orientado no qual os nós 2 e 3 são centros produtores de soja e os nós 5, 7 e 8 são terminais marítimos de exportação deste produto. Considerando a capacidade dos arcos, qual é máximo volume de exportação de soja? Com a finalidade de utilizar o algoritmo de Ford-Fulkerson, sem nenhuma alteração, o caminho a ser seguido é, como no caso anterior, modificar o grafo

original de modo que o grafo obtido tenha uma única fonte e um único sorvedouro. Além disto, não devem ser introduzidas restrições adicionais ao fluxo de soja na rede.



Modificação
no grafo



Conforme se observa na figura acima, são introduzidos dois novos nós: S e T e arcos, com capacidade infinita ligando a superfonte S aos centros produtores de soja e arcos, com capacidade infinita, ligando cada terminal marítimo ao super-sorvedouro T . No grafo alterado, deve-se determinar o fluxo máximo entre os nós S e T . Dado que os arcos incluídos no grafo têm capacidade infinita, eles não afetam o fluxo que pode ser encaminhado dos centros produtores de soja aos terminais marítimos de exportação.

7.3 Rede com Arcos Não Orientados

Conforme já mencionado no caso do problema de transbordo, quando se quer determinar o fluxo máximo de soja de uma região produtora até um terminal de exportação, não há, a priori, na malha viária um sentido estabelecido para o fluxo entre dois nós quaisquer da rede. Entre muitos pares de nós x e y , a escolha do sentido de percurso que favorece o escoamento do produto da

fonte para o sorvedouro é óbvia, mas para alguns pares de nós a escolha prévia pode conduzir a uma solução sub-ótima. Em tais situações, é melhor considerar a existência de dois arcos orientados (x, y) e (y, x) , ambos com a mesma capacidade $c(x, y) = c(y, x)$. Aplica-se, então, o algoritmo de Ford-Fulkerson ao grafo orientado resultante e, caso se encontre, para um desses pares de arcos, na solução ótima:

$$f^*(x, y) > 0 \text{ e } f^*(y, x) > 0$$

introduz-se a seguinte conexão:

$$f'(x, y) = \max \{0, f^*(x, y) - f^*(y, x)\}$$

$$f'(y, x) = \max \{0, f^*(y, x) - f^*(x, y)\}$$

7.4 Redes com limites inferiores para o fluxo nos arcos.

Admita-se que, para um ou mais arcos orientados (x, y) da rede, seja imposta, por algum motivo, um limite inferior $l(x, y) > 0$ para o fluxo naquele arco. A questão que

se coloca é como tratar esse novo problema com os recursos mostrados anteriormente.

Ao contrário do problema clássico, não é possível garantir que haja solução viável para o problema de fluxo máximo quando são impostas restrições $l(x,y) \leq f(x,y) \leq c(x,y)$, com $l(x,y) > 0$. No entanto, se for dada uma solução viável inicial $f(x,y)$, $(x,y) \in A$, e v para esse problema, é possível encontrar a solução ótima $f^*(x,y)$, v^* , fazendo uma pequena alteração na notação de geração de etiquetas do algoritmo de Ford-Fulkerson, no caso de arcos reversos.

Seja x um nó com etiqueta $(p^+, \varepsilon(x))$ e z um nó sem etiqueta para o qual exista o arco (z,x) . Se $f(z,x) > l(z,x)$ coloca-se em z a etiqueta $(x^-, \varepsilon(z))$ com $\varepsilon(z) = \min \{ \varepsilon(x), f(z,x) - l(z,x) \}$

A figura abaixo mostra um corte separando a fonte s do sorvedouro t ; dado que

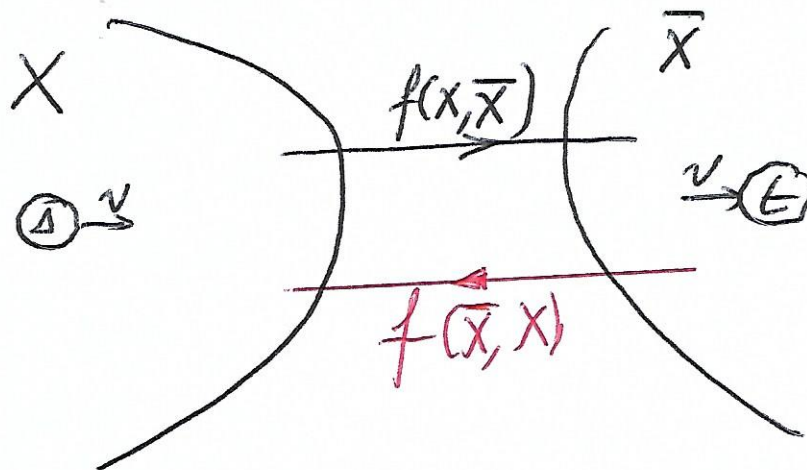
$$v = f(x, \bar{x}) - f(\bar{x}, x)$$

$$f(x, \bar{x}) \leq c(x, \bar{x})$$

$$f(\bar{x}, x) \geq \ell(\bar{x}, x)$$

para qualquer solução viável do problema de fluxo máximo neste caso

$$v \leq c(x, \bar{x}) - \ell(\bar{x}, x)$$

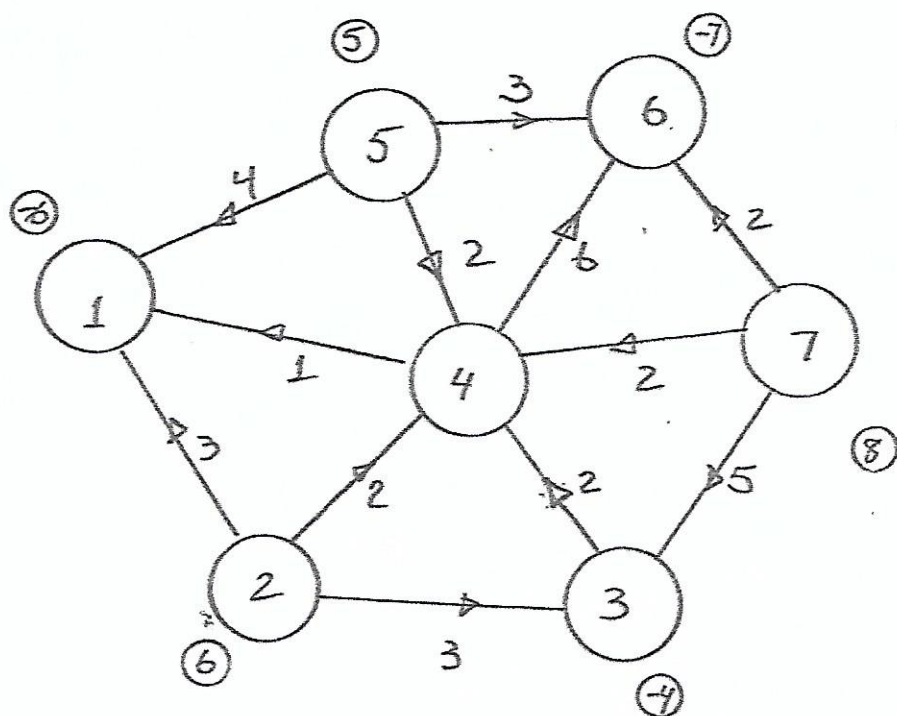


E , em consequência, resulta

$$v^* = \min_{(x, \bar{x})} \{ c(x, \bar{x}) - \ell(\bar{x}, x) \}$$

8. Viabilidade do Atendimento da Demanda em uma Rede Capacitada

Na rede orientada da figura abaixo, os números ao lado dos nós indicam os valores de oferta/demanda, conforme a convenção utilizada no problema de transbordo, enquanto os números junto aos arcos indicam a capacidade do arco, limite superior para o fluxo ao longo do arco. Embora a oferta global seja maior que a demanda global, a viabilidade de atender a demanda de cada centro consumidor depende das restrições impostas aos fluxos nos arcos da rede. Há dois caminhos para examinar esta viabilidade, um deles mais prático e o outro mais teórico, utilizando conhecimentos vistos anteriormente.

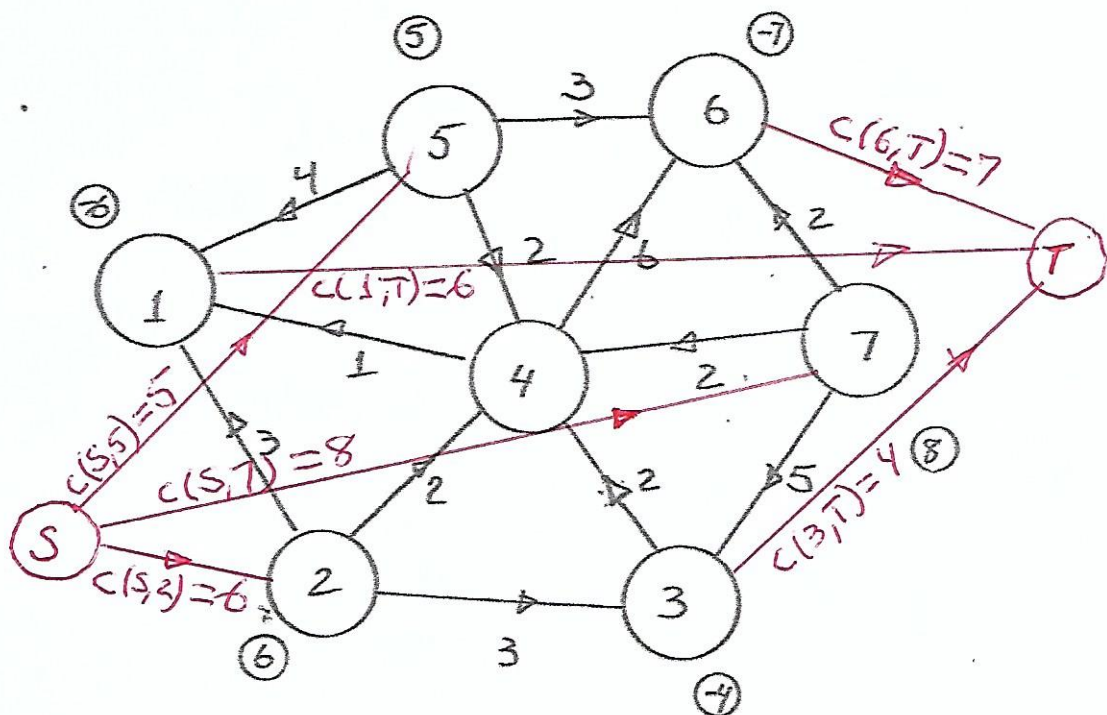


O procedimento mais prático consiste em resolver o problema de fluxo máximo em uma rede ampliada, mostrada na figura abaixo, com as seguintes características:

- 1 - são incluídos 2 novos na rede: S e T
- 2 - são incluídos arcos orientados (S, i) para todo nó i da rede original com $b_i > 0$ (isto é centro produtor); a capacidade de um desses arcos (S, i) é igual à oferta b_i desse centro produtor i ;
- 3 - são incluídos arcos orientados (i, T) para todo nó i da rede original com $b_i < 0$ (isto é centro consumidor); a capacidade de cada um desses arcos (i, T) é igual a $-b_i$, demanda do centro consumidor i .

Aplica-se, então, o algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar o fluxo máximo entre a fonte S e o sorvedouro T . Caso o fluxo máximo v^* seja igual à soma das demandas dos centros consumidores, conclui-se pela viabilidade de atendimento da demanda e um

corte de capacidade mínima $(X^*, \bar{X}^*)$, terá $\bar{X}^* = \{T\}$. Caso o fluxo máximo v^* seja menor que a soma das demandas dos centros consumidores, haverá em pelo menos um dos arcos (i, T) do corte acima citada uma folga $c(i, T) - f^*(i, T)$ que indica a demanda não atendida neste centro consumidor. Além disso, considerando-se o conjunto de nós etiquetados na última iteração (quando não se conseguiu colocar etiqueta no nó T) X^* , identifica-se um corte cuja capacidade inviabiliza o atendimento da demanda.



Outra forma de examinar a viabilidade de atendimento da demanda é a seguinte.

Seja N o conjunto de nós da rede e X um subconjunto qualquer de N , com complemento $\bar{X}$; considere-se a soma

$$S_X = \sum_{i \in X} b_i$$

Caso $S_X < 0$, existe um excesso de demanda no conjunto X (a soma das ofertas é menor que a soma das demandas) que deverá ser provida por fluxos vindos do conjunto $\bar{X}$. Mas isto somente será viável se

$$c(\bar{X}, X) \geq -S_X \quad (*)$$

em que $c(\bar{X}, X)$ é a capacidade do corte $(\bar{X}, X)$ e $-S_X$ é a demanda líquida do conjunto de nós pertencentes a X .

Observe-se que a restrição $(*)$ deve ser atendida por todos os subconjuntos X de N .