Transformações Geométricas 2D

SCC0250 - Computação Gráfica

Profa. Maria Cristina F. Oliveira

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

30 de agosto de 2023

Sumário

Sumário

Introdução

- **Transformações Geométricas** são operações aplicadas à descrição geométrica de um objeto (vértices) para mudar sua
  - posição (translação)
  - orientação (rotação)
  - tamanho (escala)

- Além dessas **transformações básicas**, existem outras
  - reflexão
  - cisalhamento

Sumário

Translação

Translação

- A translação consiste em adicionar *offsets* às coordenadas que definem um objeto

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

- Usando notação matricial, uma translação 2D pode ser descrita como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Rotação

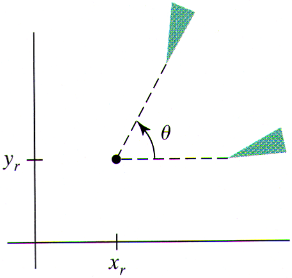
Rotação

- Define-se uma transformação de rotação por meio de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**

- No caso 2D a rotação se dá no plano: o eixo de rotação é sempre um eixo perpendicular ao plano xy
- Os pontos do objeto se movimentam sobre um arco de circunferência determinado pelo ângulo de rotação

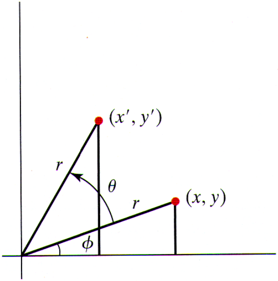
Rotação

- No caso 2D os parâmetros de rotação são o ângulo θ de rotação e a posição do ponto pivô (x_r, y_r), dado pelo ponto em que o eixo de rotação intercepta o plano xy
  - Se $\theta > 0$ a rotação é anti-horária
  - Se $\theta < 0$ a rotação é horária



Rotação

- Para simplificar, vamos considerar que o ponto pivô de rotação está posicionado na origem do sistema de coordenadas
  - O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $\mathbf{P} = (x, y)$ com o eixo horizontal e θ é o ângulo de rotação



Rotação

- Sabendo que

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\phi + \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \operatorname{sen}(\phi + \theta)$$

- como

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

- então

$$x' = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y' = r \cdot \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\theta + r \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta$$

Rotação

- $\mathbf{P} = (x, y)$ pode ser descrito por meio de coordenadas polares

$$x = r \cdot \cos\phi, \qquad y = r \cdot \operatorname{sen}\phi$$

- Então por substituição

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y' = x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$$

- Escrevendo na forma matricial temos

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Corpo Rígido

Transformação de Corpo Rígido

- A **rotação** e a **translação** são **Transformações de Corpo Rígido**, pois reposicionam um objeto sem deformá-lo
  - Ângulos e comprimentos do objeto original são preservados

Escala

Escala

- Para alterar o tamanho de um objeto aplica-se o operador de escala
- Multiplica-se as coordenadas do objeto por fatores de escala

$$x' = x \cdot s_x, \qquad y' = y \cdot s_y$$

- Na forma matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

- Propriedades de s_x e s_y
  - s_x e s_y devem ser maiores que zero
  - Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta
  - Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui
  - Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme
  - Se $s_x \neq s_y$ a escala é não uniforme

Escala

- Pela formulação definida, o objeto é escalado e movido

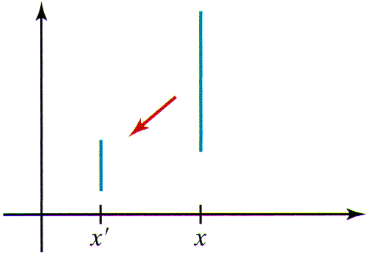


Figura: Escala de uma linha usando $s_x = s_y = 0.5$

Sumário

Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por

$$\mathbf{P'} = \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{M_2}$$

- $\mathbf{M_1}$: matriz 2×2 com fatores multiplicativos
- $\mathbf{M_2}$: matriz coluna com termos para translação

- Para aplicar uma sequencia de transformações, esse formato não ajuda
  - Eliminar a adição de matrizes permitiria descrever qualquer sequencia de transformações como uma multiplicação de matrizes (e uma única matriz descreve a sequencia)

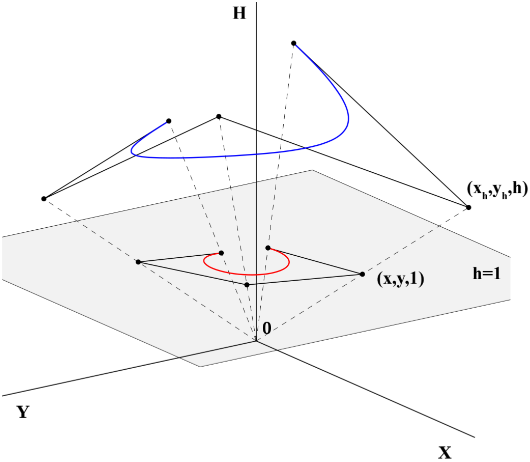
Coordenadas Homogêneas

- Isso pode ser feito expandindo-se o espaço **Cartesiano 2D** para o espaço de **Coordenadas Homogêneas 3D**

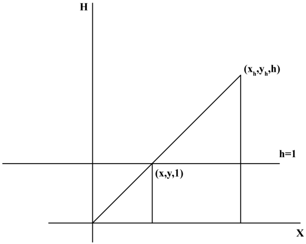
- No espaço homogêneo, as coordenadas de um ponto no espaço 2D (x, y) são representadas como (x_h, y_h, h), em que h é o parâmetro homogêneo $(h \neq 0)$

- As coordenadas cartesianas podem ser recuperadas projetando as coordenadas homogêneas do ponto no plano $h = 1$

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas



- A projeção das coordenadas definidas no sistema homogêneo para as respectivas coordenadas no sistema Cartesiano é obtida pela seguinte relação (por semelhança de triângulos):

$$x = \frac{x_h}{h}, \qquad y = \frac{y_h}{h}$$

- Nas coordenadas homogêneas, h pode ser qualquer valor não nulo, mas escolhemos $h = 1$ para simplificar a transformação

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- A representação dos objetos em coordenadas homogêneas permite expressar as transformações como multiplicações de matrizes

- A translação no espaço homogêneo é dada por

$$x'_h = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$
$$y'_h = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$
$$h = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Definindo na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

- Voltando ao espaço Cartesiano

$$x'_h/h = (1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h)/h \Rightarrow x' = x + t_x$$

$$y'_h/h = (0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h)/h \Rightarrow y' = y + t_y$$

$$h/h = (0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h)/h \Rightarrow 1 = 1$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a translação no espaço Cartesiano como

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{T}(t_x, t_y) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Rotação 2D

- Uma rotação pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x_h' \\ y_h' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Escala 2D

- Uma escala pode ser definida usando coordenadas homegêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P_h}' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P_h}$$

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformando Vértices

- Exemplo de utilização de uma matriz de transformação

```
#version 150

in vec3 a_position;

void main(void)
{
  //criando uma matriz de escala 2D
  mat3 model = mat3(1.5, 0.0, 0.0, //primeira coluna
                    0.0, 1.5, 0.0, //segunda coluna
                    0.0, 0.0, 1.0); //terceira coluna

  //multiplicando a matriz de transformacao pelo vetor
  //em coordenadas homogeneas
  vec3 pos = model * vec3(a_position[0], a_position[1], 1.0);

  //convertendo as coordenadas homogeneas para euclideanas
  gl_Position = vec4(pos[0]/pos[2], pos[1]/pos[2], 0.0, 1.0);
}
```

Sumário

Translação Inversa

- Para a translação, inverte-se o sinal das translações

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação Inversa

- Uma rotação inversa é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no sentido horário
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Escala Inversa

- O inverso da escala é obtido trocando os parâmetros por seus inversos

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

Introdução

- Usando representações matriciais homogêneas, uma sequencia de transformações pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{P'_h} &= \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{P_h} \\ &= (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1}) \cdot \mathbf{P} \\ &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P_h} \end{aligned}$$

- A transformação é dada por $\mathbf{M}$ ao invés de $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$

Compondo Translações

- Para compor duas translações podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathbf{P_h'} &= \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P_h}\} \\ &= \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P_h} \\ &= \mathbf{T}(t_{2_x} + t_{1_x}, t_{2_y} + t_{1_y}) \cdot \mathbf{P_h} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Rotações

- Para compor duas rotações podemos fazer

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P'_h} = &\quad \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \{\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{P_h}\} \\
= &\quad \{\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1)\} \cdot \mathbf{P_h} \\
= &\quad \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \mathbf{P_h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Compondo Escalas

- Para compor duas escalas podemos fazer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} &= \mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \{\mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}\} \\
&= \{\mathbf{S}(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \mathbf{S}(s_{1_x}, s_{1_y})\} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}} \\
&= \mathbf{S}(s_{1_x} \cdot s_{2_x}, s_{1_y} \cdot s_{2_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1_x} \cdot s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} \cdot s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Pivô de Rotação Arbitrário

- Rotação em relação a um pivô arbitrário é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto de rotação para a origem
  - Executo a rotação
  - Movo o ponto de rotação para a posição inicial

$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}^{-1}(x_r, y_r)$$

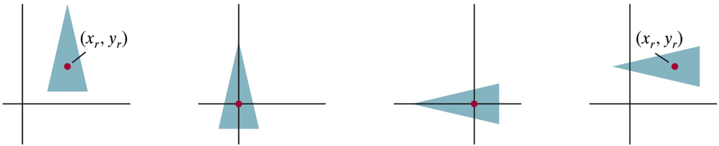
$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_r, -y_r)$$

Rotação 2D com Pivô de Rotação

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Rotação 2D com Pivô de Rotação



(a)
Original Position of Object and Pivot Point

(b)
Translation of Object so that Pivot Point (x_r, y_r) is at Origin

(c)
Rotation about Origin

(d)
Translation of Object so that the Pivot Point is Returned to Position (x_r, y_r)

Escala 2D em relação a Pivô Arbitrário

- Escala com ponto fixo é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto fixo para a origem
  - Executo a escala
  - Movo o ponto fixo para sua posição original

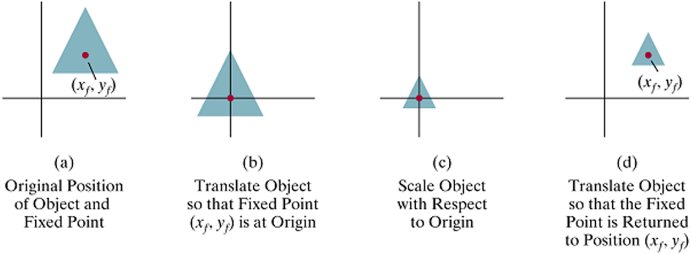
$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}^{-1}(x_f, y_f)$$

$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-x_f, -y_f)$$

Escala 2D em relação a Pivô Arbitrário

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

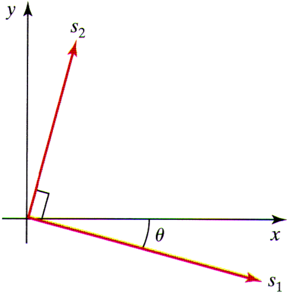
Escala 2D em relação a Pivô Arbitrário



Escala 2D em Direções Arbitrárias

- Os parâmetros s_x e s_y realizam a escala nas direções de x e y
- Para outras direções, rotaciona, escala e rotaciona de volta

$$\mathbf{S}(s_1, s_2, \theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{S}(s_1, s_2) \cdot \mathbf{R}(\theta)$$



Escala 2D em Direções Arbitrárias

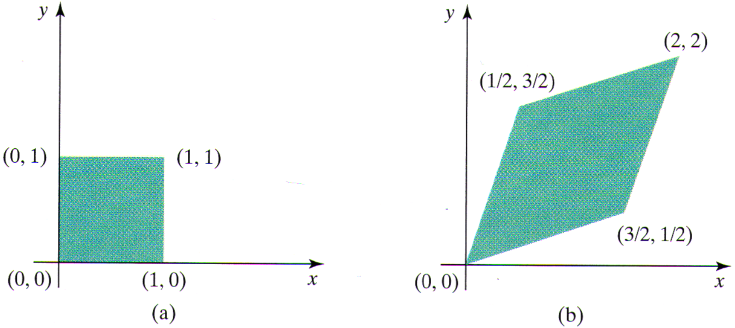


Figura: Transformação com $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $\theta = 45^0$

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matriz é associativa

$$\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} = (\mathbf{M_3} \cdot \mathbf{M_2}) \cdot \mathbf{M_1} = \mathbf{M_3} \cdot (\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1})$$

- Multiplicação nos dois sentidos é possível, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda
  - **Pré-multiplicação**: da esquerda para a direita – as transformação são especificadas na ordem em que são aplicadas ($\mathbf{M_1} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_3}$)
  - **Pós-multiplicação**: da direita para a esquerda – as transformação são especificadas na ordem inversa em que são aplicadas ($\mathbf{M_3} \rightarrow \mathbf{M_2} \rightarrow \mathbf{M_1}$)
    - OpenGL adota pós-multiplicação

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes não é comutativa $\mathbf{M_2} \cdot \mathbf{M_1} \neq \mathbf{M_1} \cdot \mathbf{M_2}$

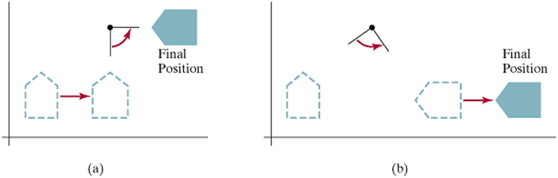


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45^0 (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45^0, depois transladado.

Sumário

Reflexão

- Espelha-se as coordenadas de um objeto relativamente a um eixo de reflexão
- No plano 2D, equivalente a uma rotação de um ângulo de 180^0

- Reflexão em $y = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

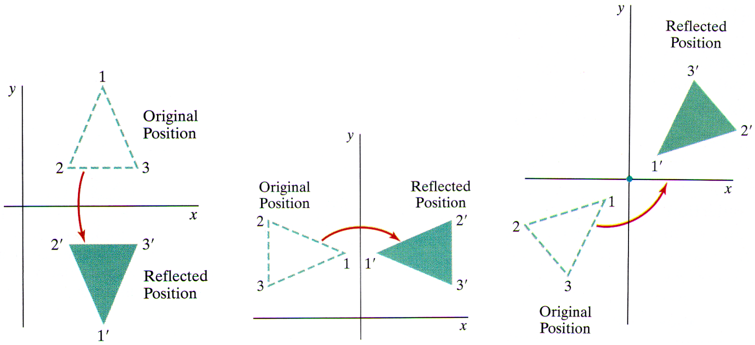
- Reflexão em $x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$ (eixo perpendincular ao plano xy, equivalente a uma rotação de 180^0)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão


y
x
1
2
3
Original Position
2′
3′
1′
Reflected Position
y
x
Original Position
2
3
1
Reflected Position
2′
1′
3′
y
x
Reflected Position
3′
2′
1′
1
2
3
Original Position

Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto na direção horizontal (x) ou vertical (y)

- Cisalhamento na direção x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como

$$x' = x + sh_x \cdot y$$

$$y' = y$$

Cisalhamento

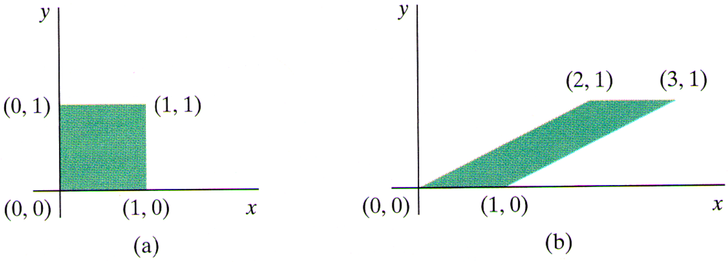


Figura: Transformando um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.