CCM - Matemática I - 2023

Os números reais : II

Aulas 4, 5, 6

28, 29, 31/08/23

Os números reais

Até a aula passada, definimos corpos:

- C é um conjunto e há duas operações definidas em C, denotadas por $+$ e $\cdot$ que satisfazem os Axiomas 1 a 6 (ambas as operações são comutativas e associativas, o produto se distribui sobre a soma, ambas têm elementos neutros e ambas tem inversos, exceto 0 que não possui inverso multiplicativo).

e, em seguida, definimos corpos ordenados:

- em C há um subconjunto $C_+ \subset C$ de números positivos que satisfaz os Axiomas de Ordem 7 a 9 (C_+ é fechado pelas operações $+$ e $\cdot$, todo número diferente de 0 está em C_+ ou seu oposto está lá, mas não ambos e $0 \notin C_+$).

Agora vamos introduzir o décimo e último axioma: o Axioma de Completude. Precisamos, para isso, introduzir algumas novas definições.

Os axiomas de ordem nos permitiram introduzir uma "ordem" em C, isto é, uma relação binária $a < b$ que satisfaz as duas propriedades a seguir e que provamos anteriormente:

(i) Se $a \neq b$, então $a < b$ ou $b < a$, mas não ambos.

(ii) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Se C é um corpo ordenado, e $A \subset C$, dizemos que $L \in C$ é uma COTA SUPERIOR para A se $x \leq L$ para todo $x \in A$.

Exemplo: Por definição, $a \in C$ é negativo se $a < 0$. Assim, se A é o conjunto dos números negativos, 0 é uma cota superior para A. Além disso, se b é um número positivo, então $b > 0$ e portanto $b > a$ para todo número negativo, isto é, b é cota superior para A.

Do mesmo modo, K é uma COTA INFERIOR para A se $x \geq K$ para todo $x \in A$.

Def: Dizemos que $L \in C$ é COTA SUPERIOR MÍNIMA para o subconjunto $A \subset C$ se:

(i) L é cota superior para A e

(ii) se $c < L$, então c não é cota superior para A.

Da mesma maneira, dizemos que $K \in \mathbb{C}$ é COTA INFERIOR MÁXIMA para um subconjunto $B \subset \mathbb{C}$ se:

(i) K é cota inferior para B e

(ii) se $c > K$ então c não é cota inferior para B.

Exemplo: 0 é cota inferior máxima para o subconjunto $\mathbb{C}_+ \subset \mathbb{C}$ de números positivos.

Prova: Como vimos, a é positivo se e somente se $a > 0$ ($\overset{Def}{\Leftrightarrow}$ $a - 0 = a$ é positivo). Portanto 0 é cota inferior para $\mathbb{C}_+$. Temos então que mostrar que se $\overset{(*)}{c} > 0$, isto é, se c é positivo, então c não é cota inferior para $\mathbb{C}_+$, isto é, existe algum número positivo menor que c.

Pergunta: Como você faria isso, isto é, como mostrar que se $c > 0$, existem números b tais que $0 < b < c$?

Na próxima página, dou o (um) caminho das pedras, mas recomendo FORTEMENTE que só olhe depois de tê-lo feito você mesma, para verificar se eu fiz certo.

(*) Cuidado: A diferença gráfica entre $\mathbb{C}$ (maiúsculo) e c (minúsculo) nem sempre é muito clara. Desculpem.

Passos para provar que $0 < c \Rightarrow$ existe $b \in C$ tal que $0 < b < c$.

- $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- $a < b$ e $a.c < b.c \Rightarrow c > 0$.
- $1 > 0$.
- $a > 0 \iff a^{-1} > 0$.
- $a > 1 \iff 0 < a^{-1} < 1$.

Existem números maiores do que 1. Segue da proposição anterior que existem também números menores do que 1. (Note: isso não valeria se C não fosse corpo).

- $0 < a < 1$ e $c > 0 \Rightarrow 0 < ac < c$.

Observação: Talvez você tenha que usar (ou reprovar) outras coisas que provamos anteriormente.

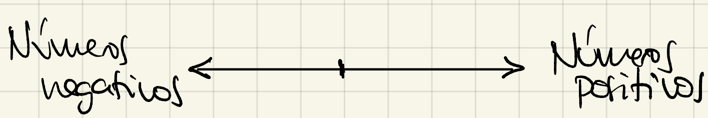
Tendo seguido os passos acima (ou chegado à mesma conclusão de outro modo), concluímos que dado qualquer número positivo, existe outro número positivo menor que o primeiro. Isso mostra que nenhum número positivo é cota inferior para o conjunto C_+ e, portanto, que 0 é a cota inferior máxima para C_+. ■

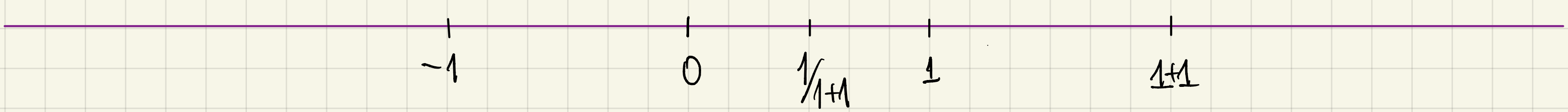
<u>Exercício</u>: Suponha que $\boxed{0<t<1}$ e mostre que, dados $a, b \in C$ com $a<b$, vale

$$\boxed{a < \underbrace{(1-t)a + tb}_{\text{Combinação convexa de } a \text{ e } b.} < b}.$$

O exercício anterior mostra que, em um corpo ordenado, dados quaisquer dois elementos distintos existe um terceiro "entre eles", isto é, se $a \neq b$, existe c tal que $a<c<b$.

Assim, podemos pensar nos elementos de um corpo ordenado "alinhados" ao longo de uma reta, na qual elementos mais à direita são maiores que todos à sua esquerda. Além disso, entre quaisquer dois elementos diferentes há infinitos outros.





Definição: Se $S \subset C$, $L \in S$ e L é cota superior para S, então chamamos L de **máximo** de S. Note que, nesse caso, L é cota superior mínima para S, já que é cota superior, por hipótese e, se $M < L$, então M não é cota superior para S já que $L \in S$ e $L > M$.

Antes de continuar, mostremos algo básico sobre cotas superiores mínimas:

Teorema: Um conjunto tem no máximo uma cota superior mínima.

Prova: Se L e L' são cotas superiores mínimas para S. Como L é cota superior mínima e L' é cota superior, então $L \leq L'$. E vice versa. Portanto $L = L'$. ∎

Notação: Se L é cota superior mínima de S, escrevemos $L = \sup S$. Se $L \in S$
SUPREMO de S
denotamos $L = \max S$.
MÁXIMO DE S

Estamos prontos para enunciar o Axioma de Completude. Entender a importância desse axioma levou 2000 anos, portanto não se engane com a simplicidade desconcertante de seu enunciado.

$\boxed{\text{Axioma de Completude}}$: Dizemos que um corpo ordenado C é completo se todo subconjunto de C que é limitado superiormente tem uma cota superior mínima.

Exemplo Importante: Suponha que C é um corpo ordenado. Definimos os inteiros $\mathbb{Z} \subset C$ e os racionais $\mathbb{Q} \subset C$. Não provamos isso, mas fica como um

Exercício: $\mathbb{Q}$ é, ele próprio, um corpo ordenado.

Vamos então supor que $\mathbb{Q}$ é, na verdade, tudo: $C = \mathbb{Q}$. Definimos o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

Teorema: S não possui cota superior mínima em $\mathbb{Q}$.

Não daremos, agora, uma prova formal desse teorema, mas a ideia é "clara", desde que assumamos que sabemos tudo o que "sabemos" sobre inteiros e racionais: o supremo L de S satisfaz $L^2 = 2$ e um tal número não pode ser racional, como vimos em sala. Mas vejamos alguns fatos indo nessa direção.

Teorema: Seja C um corpo ordenado, $a \in C$, $a > 0$ e $S = \{x \in C : x^2 < a\}$. Se $b = \sup S$, então $b^2 = a$.

Prova: Pela Lei da Tricotomia, há apenas três possibilidades: $b^2 > 0$, $b^2 < a$ ou $b^2 = a$. Vamos mostrar que as duas primeiras não podem acontecer.

Prova: Vamos usar os resultados que usamos para provar que 0 é cota inferior máxima para o conjunto dos números positivos.

$\underline{b>0}$: $(1+a)^2 = (1+a)\cdot(1+a) = 1+(a+a)+a^2 > \begin{cases} 1 & \text{já que } a, a^2 > 0, \\ a & \text{já que } 1, a, a^2 > 0, \\ a^2 & \text{já que } 1, a > 0. \end{cases}$

Segue da segunda desigualdade que $a^2 < a(1+a)^2$ e, portanto, $\frac{a^2}{(1+a)^2} < a$, isto é, $a/(1+a) \in S$. Como $a/(1+a) > 0$ e $b = \sup S$, segue que $b>0$.

Suponha que $b^2 > a$: Definimos $c = b - (b^2-2a)/2b = \frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$.
Então $0<c<b$. Além disso,

$$c^2 = b^2 - (b^2-a) + (b^2-2a)^2/4b^2 = a + (b^2-2a)^2/4b^2 > a.$$

Isso mostra que $c^2 > a \Rightarrow c^2 > x^2$ para todo $x \in S$, e como $c>0$, que $c > x$ $\forall x \in S$, isto é, c é cota superior para S, o que contradiz a hipótese $b = \sup S$.

Suponha que $b^2 < a$: Como $b>0$, podemos escolher $c>0$ tal que $c<b$ e $c < (a-b^2)/3b$. Então

$$(b+c)^2 = b^2 + c(2b+c) < b^2 + 3bc < a.$$

Portanto $b+c \in S$ e, como $c > 0$, $b+c > b$, o que novamente contradiz a hipótese $b = \sup S$.

Isso termina a prova, já que a única possibilidade que resta é $b^2 = a$ $\blacksquare$