Gabarito Lista 1 - MAE0212

Exercício 2-a)

Sabemos que a demanda diária de jornais do jornaleiro segue uma distribuição $X \sim Bin(\frac{1}{3}, 10)$ e que ele compra 5 jornais por dia. Portanto, a probabilidade dele não conseguir vender todos seus jornais será a probabilidade dele vender menos de 5 jornais no dia.Logo:

$$P(X < 5) = \sum_{i=0}^{4} \binom{10}{i} (\frac{1}{3})^i (\frac{2}{3})^{10-i} \approx 0.7868719$$

Portanto a probabilidade dele não conseguir vender todos seus jornais será aproximadamente 0,7868719.

Exercício 2-b)

Considerando que o jornaleiro não acumule os n jornais comprados em um dia que ele não vende para o outro, consideraremos como lucro o valor que ele teria ao final do dia caso conseguisse vender n jornais tal que $n \leq m$. Logo, iremos considerar todas as possibilidades possíveis de venda dele no dia e ver seu lucro máximo multiplicando o valor de retorno pela probabilidade daquele retorno específico acontecer. Portanto, para acharmos o lucro maximizado L em reais,teremos as seguintes opções:

Se ele comprar somente um jornal:

$$L = -0.1 * P(X = 0) + 0.4 * P(X > 0) \approx 0.3913$$

Se comprar dois jornais:

$$L = -0.2 * P(X = 0) + 0.3 * P(X = 1) + 0.8 * P(X > 1) \approx 0.7393$$

Se comprar três jornais:

$$L = -0.3 * P(X = 0) + 0.2 * P(X = 1) + 0.7 * P(X = 2) + 1.2 * P(X > 2) \approx 0.9897$$

Se comprar quatro jornais:

$$L = -0.4 * P(X = 0) + 0.1 * P(X = 1) + 0.6 * P(X = 2) + 1.1 * P(X = 3) + 1.6 * P(X > 3) \approx 1.1101$$

Se comprar cinco jornais:

$$L = -0.5 * P(X = 0) + 0 * P(X = 1) + 0.5 * P(X = 2) + 1 * P(X = 3) + 1.5 * P(X = 4) + 2 * P(X > 5) \approx 1.1167$$

Se comprar seis jornais:

$$L = -0.6*P(X = 0)-0.1*P(X = 1)+0.4*P(X = 2)+0.9*P(X = 3)+1.4*P(X = 4)+1.9*P(X = 5)+2.4*P(X > 5) \approx 1.0549$$

A partir da compra de seis jornais, é possível ver que o lucro esperado começa a diminuir. Portanto é possível afirmar que $m = 5$ é o valor que maximiza o lucro do jornaleiro.

Exercício 3-a)

Utilizando a propriedade da probabilidade de um evento complementar ,teremos:

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{1}{4}$$

Exercício 3-b)

Por se tratar de uma variável aleatória mista, teremos:

$$P(X=0) = F(x^+) - F(x^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

E agora portanto:

$$P(X \geq \frac{1}{2} \mid X > 0) = \frac{P(X \geq \frac{1}{2} \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X \geq \frac{1}{2})}{1 - P(X \leq 0)} = \frac{P(X \geq \frac{1}{2})}{1 - [P(X=0) + P(X<0)]} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - [\frac{1}{2} + 0]} = \frac{1}{2}$$

Exercício 5)

Para a resolução desse exercício, utilizaremos as propriedades da probabilidade condicional e assumiremos a função distribuição acumulada de W e Z dadas respectivamente por $F_W(w)$ e $F_Z(z)$ (além de independência entre as variáveis):

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = P(X+Y \leq z \mid X=0)P(X=0) + P(X+Y \leq z \mid X=1)P(X=1)$$
$$= \frac{2}{3}P(Y \leq z) + \frac{1}{3}P(Y \leq z-1)$$

Olhando individualmente para os intervalos de z, teremos:

Se $z < 0$:

$$F_Z(z) = 0$$

Se $0 \leq z < 1$:

$$F_Z(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{2} + 0 = \frac{z}{3}$$

Se $1 \leq z < 2$:

$$F_Z(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{2} = \frac{z}{2} - \frac{1}{6}$$

Se $2 \leq z < 3$:

$$F_Z(z) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{2} = \frac{z+3}{6}$$

Se $z \geq 3$:

$$F_Z(z) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$$

Portanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 \quad se \quad z < 0 \\ \frac{z}{3} \quad se \quad 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{z}{2} - \frac{1}{6} \quad se \quad 1 < z \leq 2 \\ \frac{z+3}{6} \quad se \quad 2 < z \leq 3 \\ 1 \quad se \quad z > 3 \end{cases}$$

Agora para W:

$$F_W(w) = P(XY \leq w) = P(XY \leq w \mid X=0)P(X=0) + P(XY \leq w \mid X=1)P(X=1)$$

$$= \frac{2}{3}P(0 \leq w) + \frac{1}{3}P(Y \leq w)$$

No caso, teremos $P(0 \leq w)$ como uma indicadora constante, e portanto teremos:

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 \quad se \quad w < 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{w}{6} \quad se \quad 0 \leq w \leq 2 \\ 1 \quad se \quad w > 2 \end{cases}$$

Exercício 8-a)

Utilizando o TLC e propriedades da normal padrão, temos que:

$$P(X \geq \mu + 2\sigma) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq 2) =^{TLC} P(Z \geq 2) \approx 1 - 0.9772 \approx 0.0288$$

Exercício 8-b)

Utilizando o TLC e propriedades da normal padrão, temos que:

$$P(|X - \mu| < \sigma) = P(-\sigma < X - \mu < \sigma) =^{TLC} P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 < Z < 1) = 2 \cdot (P(Z < 1) - 0.5) \approx 0.6827$$

Exercício 8-c)

Utilizando o TLC e propriedades da normal padrão, temos que:

$$P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0.99 \quad <=> \quad P(-a \leq Z \leq a) = 0.99 = 2 \cdot (P(Z < a) - 0.5) \quad <=> \quad P(Z < a) = 0.995$$

$$<=> \quad a \approx 2.5758$$

Exercício 8-d)

Utilizando o TLC e propriedades da normal padrão, temos que:

$$P(X > a) = 0.9 \quad <=> \quad P(Z > \frac{a - \mu}{\sigma}) = 0.9 \quad <=> \quad \frac{a - \mu}{\sigma} = -1.28 \quad <=> \quad a = \mu - 1.28\sigma$$