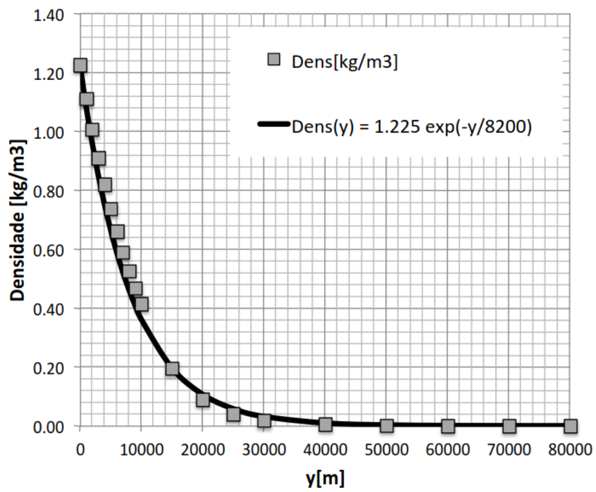
Termo-Estatística

Prof. Thales Souza Freire

30 de agosto de 2023

Q 1. (Resolvido em sala) A figura ao lado mostra dados experimentais da densidade da atmosfera $\rho(\mathrm{y})$ em $\mathrm{kg/m^3}$ versus a altura em relação ao nível do mar, y em m. Os dados foram ajustados por uma função que descreve bem a densidade do ar em função da altura: $\rho(\mathrm{y}) = 1,225\,\mathrm{e}^{-\mathrm{y}/8200}$. Para um cilindro de área da base de 1 m^2, e assumindo que a massa das moléculas é de 28g/mol determine:



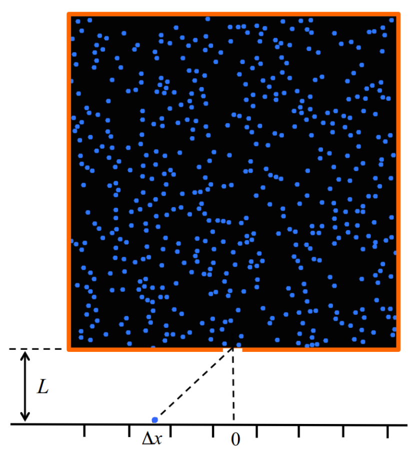
(a) a quantidade total de molécula do nível do mar até uma distância infinitamente grande (fator de normalização);

(b) a probabilidade de encontrar uma molécula numa intervalo dy;

(c) a quantidade de moléculas no intervalo entre 0 e 3 km;

(d) altura média das moléculas $\langle \mathrm{y} \rangle$.

Q 2. (Resolvido em sala) No experimento indicado, as moléculas do gás podem escapar pelo pequeno orifício. A distribuição das posições ao longo do eixo $0x$ indica a distribuição direcional das velocidades das moléculas no plano $0xy$, pois $x/L = v_\mathrm{x}/v_\mathrm{y}$. Considere os eventos do tipo: "detecção de uma molécula em um intervalo Δx". A tabela abaixo mostra o resultado obtido para a detecção de 10 partículas em um experimento.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(mm)	1.0	2.5	–3.0	–0.5	0.3	–1.2	0.8	1.8	–1.7	–0.9

(a) Com os valores da tabela, obtenha $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, σ e σ^2

(b) Ajuste a seguinte função de densidade de probabilidade para descrever os valores médios obtidos:

$$f(x) = A\,e^{-\alpha x^2}$$

Q 3. A velocidade de um carro numa estrada é descrita pela distribuição: $f(v) = A\,v\,e^{-v/v_0}$, onde v varia de 0 a infinito e A e v_0 são constantes.

(a) Determine A em termos de v_0.

(b) Calcule as expressões da velocidade média $\langle v \rangle$, a velocidade mais provável v_{mp} e a velocidade quadrática média $\langle v^2 \rangle$.

(c) Assumindo que o número de acidentes por mês é proporcional as velocidades dos carros e que N carros passaram pela estrada, qual é o número médio de acidentes por mês nesta estrada?

Q 4. De acordo com a Teoria Cinética dos Gases, se um gás estiver confinado em um tubo retilíneo, ou seja, as moléculas só apresentam movimento em uma direção (x) e a energia é descrita por

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2,$$

onde m é a massa e v_x é a velocidade em x que pode variar de $-\infty$ a $+\infty$. A distribuição de velocidades pode ser escrita como

$$f(v_x) = \frac{1}{Z} e^{-m v_x^2 / 2 k_B T},$$

onde Z é a constante de normalização, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura.

(a) Determine a constante de normalização, Z;

(b) Determine o valor da energia média por partícula, $\langle E \rangle$. Compare o valor que você obteve com o esperado pelo Teorema de Equipartição de Energia;

(c) Determine a velocidade média, $\langle v_x \rangle$;

(d) Determine o momento linear médio, $\langle p_x \rangle$;

(e) Faça o gráfico desta distribuição de probabilidade de velocidades, $f(v_x)$, para duas temperaturas T_1 e T_2, sendo $T_2 > T_1$.

Q3. a) Da condição de normalização:

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow A\int_0^\infty v e^{-\alpha v}\,dv = 1 \quad , \text{com} \quad \alpha = v_0^{-1}$$

Podemos escrever:

$$\int_0^\infty v e^{-\alpha v}\,dv = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha v}\,dv = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha v}}{-\alpha}\Bigg|_0^\infty\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(0 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Substituindo este resultado, fica:

$$A\frac{1}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \quad A = \alpha^2 = \frac{1}{v_0^2}$$

b) i) $\langle v\rangle = \int_0^\infty v f(v)\,dv = A\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v}\,dv \quad$, com $A = v_0^{-2}$ e $\alpha = v_0^{-1}$

$$= A\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}\,dv = A\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = A\frac{2}{\alpha^3} = 2\,v_0^{-2}\,v_0^3 = 2v_0$$

ii) $\langle v^2\rangle = \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv = A\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v}\,dv = -A\frac{\partial}{\partial\alpha^3}\frac{1}{\alpha} = -A\frac{(-1)^3 3!}{\alpha^4}$

$$= v_0^{-2}\cdot 6\cdot v_0^4 = 6\,v_0^2$$

$\Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{6}\,v_0^2$

iii) $\frac{d}{dv}f(v) = 0 \rightarrow$ condição de extremo de $f(v)$

$$\frac{d}{dv}A v e^{-\alpha v} = A\left(e^{-\alpha v} - \alpha v\,e^{-\alpha v}\right) = A e^{-\alpha v}\left(1 - \alpha v\right) = 0$$

$$e^{-\alpha v} = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \alpha v = 0$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

$v \to \infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $v = \frac{1}{\alpha} = v_0$ → velocidade mais provável

c) Para uma dada constante de proporcionalidade c, o número de acidentes para N carros é:

$$n = cNv$$

A média de acidentes fica:

$$\langle n \rangle = \langle cNv \rangle = cN\langle v \rangle = 2cNv_0$$

Q4. a) A condição de normalização é:

$$\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x = 1 \Rightarrow \qquad Z = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

b) $$\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m \frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{Z} \cdot 2\int_0^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x = \frac{m}{Z} G_2 = \frac{m}{Z}\frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$* \; G_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}, \quad n > 0$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\cancel{m}}{4} \cancel{\pi^{1/2}} \left(\frac{2k_BT}{\cancel{m}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\cancel{m}}{2\cancel{\pi} k_BT}\right)^{1/2} = \frac{2}{4} k_BT = \frac{1}{2} k_BT$$

Como só existe 1 grau de liberdade e, a energia média é compatível com o T.E.E.

c) $$\langle v_x \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_x e^{-\alpha v_x^2}}_{\hookrightarrow \text{ impar}} dv_x = 0$$

d) $$\langle p_x \rangle = \langle m v_x \rangle = m \langle v_x \rangle = 0$$

e) Como a função é simétrica, a velocidade mais provável é também a média, logo:

$$f(v_{mp}) = f(0) = \frac{1}{Z} e^{-\alpha . 0} = Z^{-1} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}$$

Assim, quanto maior a temperatura, menor é o pico da distribuição. Por ser uma distribuição gaussiana é possível calcular o desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{m} \langle E \rangle} = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{1}{2} k_BT}$$

$$= \sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

Como 2σ é a largura à meia altura da gaussiana, à medida que T cresce a distribuição se alarga. Assim: