

Aula 5

Equação de Dirac: Spin e Antimatéria

Renan Milnitsky
Marcelo Gameiro Munhoz
Julien Minerbo

Desde as dificuldades enfrentadas pelo problema da estrutura fina do Hidrogênio e a revelação da existência do Spin, uma reformulação da Mecânica Quântica de Schroedinger se mostrava necessária. A tentativa de Pauli de introduzir, à mão, correções relativísticas na energia clássica se mostraram infrutíferas. A primeira tentativa de introduzir a relatividade por meio da Equação de Klein-Gordon, apesar de fornecer um resultado invariante sob transformações de Lorentz, trouxe consigo graves problemas com relação a uma densidade de probabilidade negativa, levantando questões sobre se $\Psi(\vec{r}, t)$ poderia de fato representar uma função de onda neste novo formalismo.

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi$$

Outros aspectos problemáticos da equação são suas derivadas de segunda ordem no espaço e no tempo, que surge na devido ao fato de que a energia relativística é definida a partir de termos quadráticos.

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Ciente destes problemas, Paul Dirac compartilha, em 1928, uma nova equação que busca manter os seguintes aspectos:

- I. Manter uma derivada de primeira ordem no tempo, de forma que a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ contenha todas as informações sobre o estado quântico da partícula, tentando resgatar uma densidade de probabilidade positiva.
- II. Manter uma simetria no espaço e no tempo, recorrendo também a uma derivada de primeira ordem no espaço.
- III. Apresentar soluções compatíveis com a energia relativística $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ e que sejam, portanto, consistentes também com a equação de Klein-Gordon.

1. Equação de Dirac e Linearização da Energia Relativística

Tendo em vista que os operadores de energia e momento são definidos como

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}; \quad \hat{E} \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Para que possamos ter derivadas de primeira ordem no espaço e no tempo, a energia relativística precisa ser escrita em termos de \mathbf{E} e \mathbf{p} , ao invés de E^2 e \mathbf{p}^2 , e manter uma coerência com a tradicional forma prescrita pela teoria da relatividade restrita.

Dirac então propõe uma linearização na energia com a seguinte estrutura

$$E = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} \cdot mc^2 \quad (\text{Eq. 1})$$

Note que ele busca manter uma coerência com a equação original da energia relativística ao reescrever p^2c^2 como um produto escalar $c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$, da mesma forma que reescreve m^2c^4 como $\hat{\beta} \cdot mc^2$. Ao aplicar os operadores de energia e momento nesta proposta de escrita linear da energia, chegamos a famosa Equação de Dirac apresentada na Eq. 2

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = -i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) + \hat{\beta} mc^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{Eq. 2})$$

O desafio da equação consiste em encontrar características para $\vec{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ capazes de reconstruir os termos quadráticos da energia relativística como a conhecemos. Na busca por esta coerência, Dirac propõe um desenvolvimento a Eq. 1 da seguinte forma

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} \cdot mc^2$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} mc)$$

Elevando todos os lados da equação ao quadrado, temos que

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = c^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} mc)^2$$

Ao reescrevermos o produto escalar $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ e em termos de componentes 1, 2 e 3, associadas às componentes x, y e z do vetor momento \vec{p} , a relação pode ser reescrita como


$$p^2c^2 + m^2c^4 = c^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} mc)^2 = c^2(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc)^2 \quad (\text{Eq. 3})$$

Abrindo o termo ao quadrado destacado em vermelho na Eq. 3, no qual se encontram α_1 , α_2 , α_3 e β , temos que

$$\begin{aligned} (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc)^2 &= \alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \alpha_3^2 p_3^2 + \beta^2 m^2 c^2 \\ &+ \alpha_1 p_1 \alpha_2 p_2 + \alpha_1 p_1 \alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1 \beta mc \\ &+ \alpha_2 p_2 \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \alpha_3 p_3 + \alpha_2 p_2 \beta mc \\ &+ \alpha_3 p_3 \alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_3 \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \beta mc \\ &+ \beta mc \alpha_1 p_1 + \beta mc \alpha_2 p_2 + \beta mc \alpha_3 p_3 \end{aligned}$$

Se nos atentarmos ao termo em amarelo, perceberemos que, se $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$, conseguimos retornar exatamente aos termos quadráticos p^2 e m^2 presentes na energia relativística, uma vez que, considerando $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, obtemos

$$\alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \alpha_3^2 p_3^2 + \beta^2 m^2 c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2 = p^2 + m^2 c^2$$

Desta forma, para que consigamos retornar à energia relativística $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, os demais termos mistos, destacados pelas cores , devem ser todos nulos. Esta informação nos fornece relações de multiplicação que os coeficientes α e β devem ter entre si, de modo que podemos observar que

$$\alpha_1 p_1 \alpha_2 p_2 + \alpha_2 p_2 \alpha_1 p_1 = 0$$

$$\alpha_1 p_1 \alpha_3 p_3 + \alpha_3 p_3 \alpha_1 p_1 = 0$$

$$\alpha_2 p_2 \alpha_3 p_3 + \alpha_3 p_3 \alpha_2 p_2 = 0$$

$$\alpha_1 p_1 \beta m c + \alpha_2 p_2 \beta m c + \alpha_3 p_3 \beta m c + \beta m c \alpha_1 p_1 + \beta m c \alpha_2 p_2 + \beta m c \alpha_3 p_3 = 0$$

Combinados, estes resultados todos geram as famosas relações de Dirac para os coeficientes α_1 , α_2 , α_3 e β , sintetizadas da seguinte forma:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0; \quad (i \neq j)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0; \quad (i = 1, 2, 3)$$

Com isto, Dirac propõe 4 matrizes 4x4 que obedecem a estas relações entre os 4 coeficientes α_1 , α_2 , α_3 e β . Estas matrizes, também conhecidas como matrizes de Dirac, são expressas por

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tendo em mãos a equação e as matrizes $\vec{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ que garantem sua linearidade, Dirac conseguiu recompor uma interpretação da função de onda consistente com uma densidade de probabilidade positiva e normalizável, de acordo com o que se espera de uma teoria quântica,

$$P(\vec{r}, t) d\vec{r} = \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

reescrevendo também a corrente e a conservação da probabilidade da seguinte forma

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = c \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{\alpha} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Além disso, o fato de a própria estrutura das matrizes serem 4x4 e a relatividade representar um quadri-momento a partir de um vetor de quatro componentes, três associadas ao momento e uma à energia, as soluções que representam a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ na equação de Dirac devem também ser descritas em 4 componentes

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r}, t) \\ \Psi_2(\vec{r}, t) \\ \Psi_3(\vec{r}, t) \\ \Psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

2. Equação de Dirac e a descrição do elétron em repouso

Que resultados físicos podemos extrair da Equação de Dirac? Um dos problemas iniciais dos quais Dirac se debruçou foi o de compreender o que a equação tem a nos contar sobre elétrons em repouso. Retomando a Equação de Dirac apresentada na Eq. 2 e reconhecendo que para elétrons em repouso, o termo referente ao momento se anula, com $\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) = 0$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \hat{\beta} mc^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{Eq. 3})$$

Reescrevendo em função da matriz $\hat{\beta}$ e das 4 soluções $\Psi_1(\vec{r}, t)$, $\Psi_2(\vec{r}, t)$, $\Psi_3(\vec{r}, t)$ e $\Psi_4(\vec{r}, t)$, temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r}, t) \\ \Psi_2(\vec{r}, t) \\ \Psi_3(\vec{r}, t) \\ \Psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r}, t) \\ \Psi_2(\vec{r}, t) \\ \Psi_3(\vec{r}, t) \\ \Psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

Abrindo a multiplicação das matrizes, obtemos quatro equações diferenciais

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = + mc^2 \Psi_1(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = + mc^2 \Psi_2(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = - mc^2 \Psi_3(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = - mc^2 \Psi_4(\vec{r}, t)$$

As soluções para estas equações diferenciais possuem características semelhantes às exponenciais imaginárias que descrevem o pacote de onda obtido com a equação de Schroediger, no entanto, ao invés da energia clássica, ela possui agora constantes associadas a energia de repouso $E = mc^2$ e revelam um comportamento curioso que precisa ser interpretado cuidadosamente

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r}, t) \\ \Psi_2(\vec{r}, t) \\ \Psi_3(\vec{r}, t) \\ \Psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(iE/\hbar)t} \\ e^{-(iE/\hbar)t} \\ e^{+(iE/\hbar)t} \\ e^{+(iE/\hbar)t} \end{pmatrix}$$

O primeiro aspecto a ser percebido na solução é o fato de que ele prevê dois pares semelhantes de solução, sendo o primeiro par $e^{-(iE/\hbar)t}$ correspondente a dois estados de energia positiva $E = + mc^2$, e o segundo par $e^{+(iE/\hbar)t}$ correspondente a dois estranhos estados de energia negativa $E = - mc^2$. Matematicamente, o resultado já era esperado, uma vez que a energia relativística é definida em termos de E^2 e, portanto, sua solução prevê duas raízes quadradas, sendo uma positiva e outra negativa. Mas como interpretar fisicamente este resultado? Dedicaremos uma seção mais adiante a este problema.

Um segundo aspecto a ser observado na resolução é a existências de dois pares de soluções para cada estado de energia positivo e negativo: como interpretar os dois estados da solução $e^{-(iE/\hbar)t}$ e os dois da solução $e^{+(iE/\hbar)t}$? É na resposta dessa questão que aparecem um dos resultados mais extraordinários da equação de Dirac: o fato de ela prever e associar a cada autoestado das soluções positiva e negativa, um autovalor que representa a projeção do spin.

Isto significa que, para Dirac, os elétrons com energia positiva podem ser descritos por uma função $\Psi_1(\vec{r}, t) = e^{-(iE/\hbar)t}$ que expressa um estado de energia positiva com spin $+1/2$ e outra solução $\Psi_2(\vec{r}, t) = e^{-(iE/\hbar)t}$ de spin $-1/2$.

Adicionalmente, os elétrons com energia negativa também podem ser descritos de forma análoga, por uma função $\Psi_3(\vec{r}, t) = e^{-(iE/\hbar)t}$ que expressa um estado de spin $+1/2$ e outra solução $\Psi_4(\vec{r}, t) = e^{-(iE/\hbar)t}$ de spin $-1/2$, ainda que tenhamos que realizar um esforço interpretativo para compreender o que seriam os tais elétrons de energia negativa.

Não coincidentemente, as matrizes 4×4 α_1 , α_2 e α_3 que estruturam a equação de Dirac, podem ser reescritas como matrizes 2×2 , fazendo uso das mesmas matrizes que Pauli utilizou para descrever as possíveis projeções do spin nos eixos x, y e z, denominados aqui como 1, 2 e 3, onde:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_1 & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_2 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_2 & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ S_3 &= \frac{\hbar}{2} \sigma_3 & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando as matrizes de Pauli, as matrizes α_1 , α_2 e α_3 que compõe a equação de Dirac podem ser reescritas como

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

estabelecendo uma relação direta entre a forma como Pauli descreveu o spin em seu princípio da exclusão, e a forma como ele emerge naturalmente na descrição relativística da mecânica quântica de Dirac. Para manter o grupo de matrizes escrito em forma 2×2 , a matriz β também pode ser reescrita, fazendo uso da matriz 2×2 identidade \mathbb{I} , como

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

3. Equação de Dirac e a descrição do movimento do elétron livre

Será que o spin é um resultado particular que só aparece quando analisamos o problema do elétron em repouso? E a energia negativa, será que também aparece como um caso particular dos elétrons em repouso? Para ampliar os resultados interpretativos da Equação de Dirac, analisaremos agora o problema do elétron livre, abordando uma situação na qual tentaremos descrever o seu movimento abordando a Equação de Dirac independente do tempo de um elétron que se movimenta livremente e unidimensionalmente ao longo do eixo z.

Retomando a forma como a equação é apresentada na Eq.2, o movimento ao longo do eixo z considera que $\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial z}(z)$. Deste modo, a equação pode ser reescrita como

$$-i\hbar c\alpha_3 \frac{\partial\Psi}{\partial z}(z) + \beta mc^2\Psi(z) = E\Psi(z) \quad (\text{Eq. 4})$$

que é a Equação de Dirac independente do tempo que descreve o elétron livre.

Considerando que a Equação de Dirac prevê 4 soluções, podemos reescrevê-la pensando em dois pares $\varphi(z)$ e $\chi(z)$ que representam os estados de energia positiva e negativa, respectivamente, de modo que

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \\ \Psi_3(z) \\ \Psi_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \chi(z) \end{pmatrix}$$

onde

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_3(z) \\ \Psi_4(z) \end{pmatrix}$$

Utilizando esta notação e reescrevendo a Eq. 4 de forma matricial, utilizando as matrizes α_3 e β da forma 2x2 como proposta por Pauli, teremos que

$$-i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação e a soma das matrizes, a equação produz duas equações diferenciais

$$-i\hbar c\sigma_3 \frac{\partial\chi}{\partial z} + \mathbb{I}mc^2\varphi = E\varphi$$

$$-i\hbar c\sigma_3 \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \mathbb{I}mc^2\chi = E\chi$$

Que podem ser reescritas como

$$-i\hbar c\sigma_3 \frac{\partial\chi}{\partial z} = \mathbb{I}(E - mc^2)\varphi \quad (\text{Eq. 5})$$

$$-i\hbar c\sigma_3 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathbb{I}(E + mc^2)\chi \quad (\text{Eq. 6})$$

Onde σ_3 e \mathbb{I} são, respectivamente, a matriz de Pauli da componente z e a matriz identidade, que são dadas por:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste momento, ao observarmos as equações 5 e 6, percebemos que elas possuem uma estrutura semelhante da partícula livre de Schroedinger, de modo que possamos escrever soluções para $\varphi(z)$ e $\chi(z)$ em termos da exponencial imaginária $e^{ikz} = e^{ipz/\hbar}$, lembrando que $k = \frac{p}{\hbar}$, que representa um pacote de onda se movimentando livremente pelo espaço. Deste modo, teremos que a equação da partícula livre pode ser descrita como

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \chi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} \quad (\text{Eq. 7})$$

onde

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{ipz/\hbar} \quad \text{e} \quad \chi(z) = \chi_0 e^{ipz/\hbar}$$

Precisamos agora determinar as características das constantes φ_0 e χ_0 para apresentar uma solução completa para $\Psi(z)$. Como as equações 5 e 6 dependem das derivadas espaciais de $\varphi(z)$ e $\chi(z)$, elas podem ser expressas por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{ip}{\hbar} \varphi_0 e^{ipz/\hbar}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{ip}{\hbar} \chi_0 e^{ipz/\hbar}$$

Substituindo as soluções da Eq. 7 e suas respectivas derivadas nas equações 5 ou 6, conseguimos extrair uma relação entre φ_0 e χ_0 . Optamos neste caso, sem nenhum motivo especial, por substituir na Eq. 6, de onde obtemos que

$$\begin{aligned} -i\hbar c \sigma_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= (E + mc^2) \chi \\ -i\hbar c \sigma_3 \cdot \frac{ip}{\hbar} \varphi_0 e^{ipz/\hbar} &= (E + mc^2) \chi_0 e^{ipz/\hbar} \\ c \sigma_3 p \varphi_0 &= (E + mc^2) \chi_0 \\ \chi_0 &= \frac{\mathbf{pc}}{E + mc^2} \sigma_3 \varphi_0 \end{aligned}$$

Retornando este resultado à solução obtida com a Eq. 7, vemos que ela pode ser reescrita como

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \chi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \frac{pc}{E + mc^2} \sigma_3 \varphi_0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} \quad (\text{Eq. 8})$$

Como $\varphi(z)$ apresenta duas soluções, podemos escrever duas possibilidades de representação de φ_0 , uma φ_0^+ associada ao spin para cima $+\frac{1}{2}$ (\uparrow) e outra φ_0^- ao spin para baixo $-\frac{1}{2}$ (\downarrow), de modo que a forma de diferenciar estas soluções seja

$$\varphi_0^+ = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_0^- = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sendo a constante de normalização A interpretada como a amplitude do elétron livre e pode ser utilizada para determinar a probabilidade de encontrá-lo com spin para cima ou para baixo.

Para além de φ_0 , a Eq. 8 apresenta na segunda linha da matriz um termo $\sigma_3\varphi_0$, que pode ser obtido a partir da multiplicação da matriz de Pauli σ_3 , com as representações de φ_0^+ e φ_0^- , de modo que

$$\begin{aligned}\sigma_3\varphi_0^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \sigma_3\varphi_0^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3\varphi_0^+ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \sigma_3\varphi_0^+ &= A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Substituindo estas possibilidades de representação de φ_0 e $\sigma_3\varphi_0$ na Eq. 8

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \frac{pc}{E + mc^2} \sigma_3\varphi_0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar}$$

ela pode ser reescrita de duas formas, uma representando os elétrons que se movimentam livremente com o spin para cima e outra com o spin para baixo, ambos no sentido positivo do eixo z .

$$\Psi^+(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{pc}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} \quad \Psi^-(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{pc}{E + mc^2} \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar}$$

4. Energia Negativa, Antimatéria e o Mar de Dirac

Logo após sua publicação, a Equação de Dirac foi muito bem recebida pela comunidade científica por conseguir extrair, a partir de teorias fundamentais, as propriedades do spin, algo que durante anos assolou a mecânica quântica ondulatória de Schroedinger.

No entanto, como apontado na seção sobre o elétron em repouso, para além de duas soluções referentes ao spin, a Equação de Dirac previa também duas soluções equivalentes, mas associadas a autoestados de energia negativa. Ainda que uma das primeiras reações tenha sido a de desconsiderar tais estados pela falta de capacidade de conferir a eles qualquer significado físico, a persistência dos estados de energia negativa nos vários desdobramentos da equação de Dirac fez com que o físico teórico se dedicasse a construir uma interpretação sobre eles.

Sua forma de interpretar os estados negativos de energia se materializou numa proposta que o próprio Dirac denominou como “Teoria dos Buracos”, mas que se popularizou ao longo da histórica como “Mar de Dirac”.

Segundo esta proposta, os estados de energia positiva estariam associados elétrons que costumeiramente observamos na realidade física. No entanto, para além deles, haveria um outro conjunto de elétrons que ocupariam um verdadeiro mar de estados de energia negativa, como mostra a Figura 1.

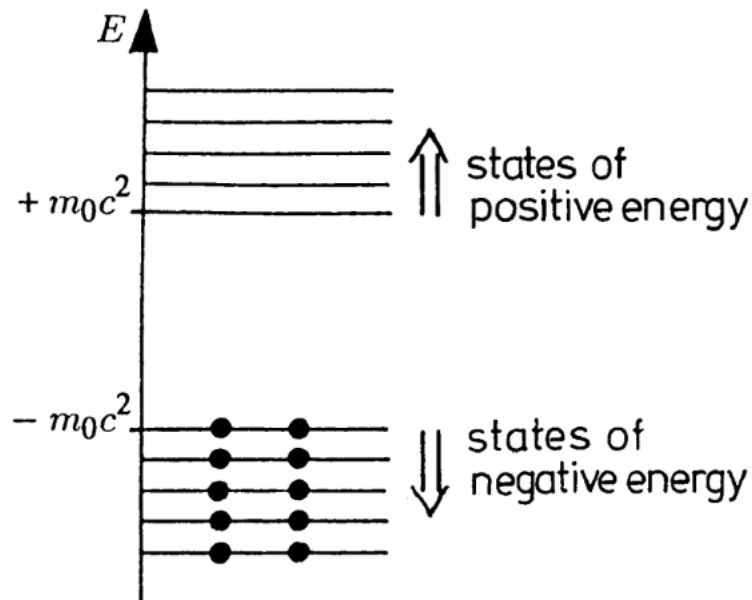


Figura 1 - Representação gráfica dos estados de energia positiva e negativa no Mar de Dirac. Note que os estados de energia negativa $-m_0c^2$ estão todos ocupados. (Fonte, Greiner, 2011)

Seria possível acessar estes elétrons que ocupam os elétrons de energia negativa? Segundo Dirac, eles poderiam ser acessados a partir da incidência de um fóton com energia maior que duas vezes a massa do m_0 elétron ($hf > 2m_0c^2$). Se este evento ocorresse, um elétron seria ejetado do Mar de Dirac, deixando nele um buraco que, pela conservação de carga elétrica, poderia ser interpretado como um elétron de carga elétrica positiva, como apresentado na Figura 2.

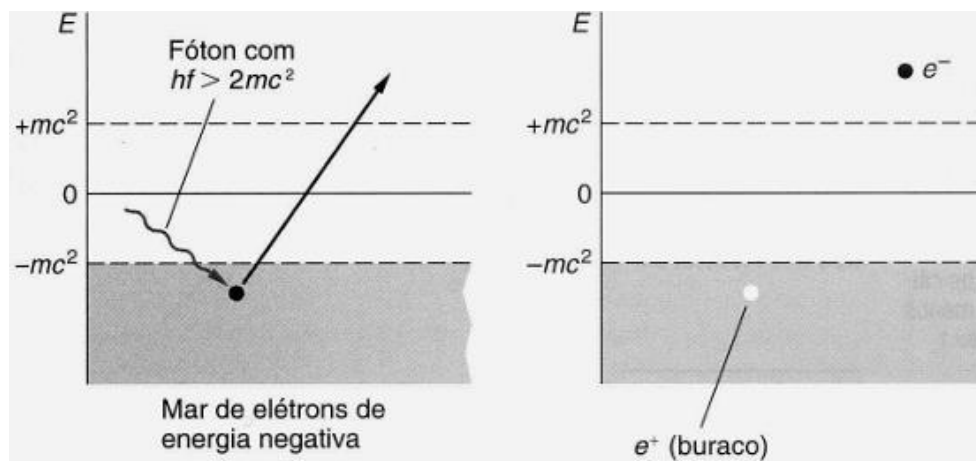


Figura 2 - Interação de um fóton com o Mar de Dirac. A incidência do fóton arranca um elétron com carga elétrica negativa e produz, como consequência, um buraco interpretado como um elétron com carga elétrica positiva. (Fonte, Eisberg, 1979)

Este elétron com carga elétrica positiva foi denominado por Dirac como um antielétron e atualmente é conhecido como pósitron. Este mecanismo que Dirac descreve, mais adiante passa a ser descrito como um processo de produção de pares, no qual um fóton produz um par elétron-pósitron, sendo o pósitron para Dirac interpretado como um buraco neste mar de elétrons de energia negativa - daí o nome de teoria dos buracos. Similarmente, a aniquilação de um elétron com um pósitron, seria interpretada no Mar de Dirac como um processo inverso, quando um elétron passa a ocupar um buraco e emite fótons com energia mínima de m_0c^2 como consequência. Estes processos estão representados na Figura 3.

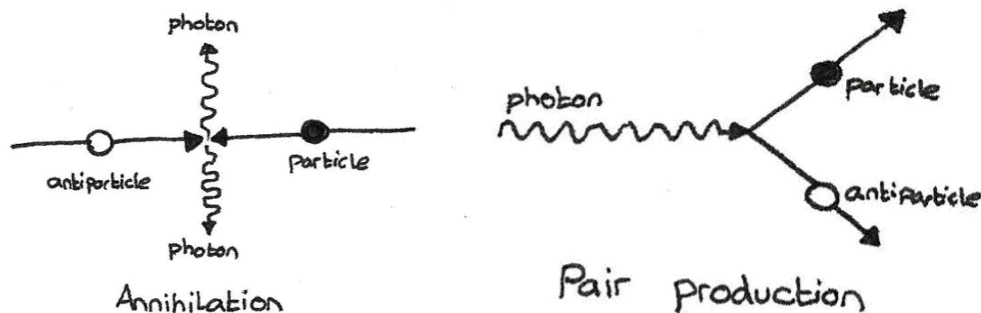


Figura 3 - Os processos de aniquilação (à esquerda) e produção (à direita) de pares elétron-pósitron.

A teoria dos buracos gerou muitas dúvidas não só na comunidade científica, mas também no próprio Dirac, uma vez que nenhuma partícula com tais características havia sido detectada experimentalmente até este momento da história. Em seu artigo de 1931, onde ele formaliza sua teoria dos buracos, ele pontua que

Um buraco, se ele existir, seria um novo tipo de partícula, ainda desconhecida pela física experimental, com a mesma massa e carga oposta a de um elétron. Podemos chamar tal partícula de anti-elétron. Não esperaríamos encontrar nenhum deles na natureza, devido à sua rápida taxa de recombinação com elétrons, mas se pudessem ser produzidos experimentalmente em alto vácuo, seriam bastante estáveis e passíveis de observação. Um encontro entre dois raios gama (de energia de pelo menos 0,5 MeV) poderia levar à criação simultânea de um par elétron e anti-elétron. Os prótons, como idealizados anteriormente, estão desconectados dos elétrons. Analogamente, espera-se que os prótons também tenham seus próprios estados de energia negativa, todos normalmente ocupados, sendo os desocupados aparecendo como antiprótons. (Dirac, 1931, pp. 61).

Como veremos mais adiante, o pósitron se consolida como uma nova partícula, no entanto, a ideia do Mar de Dirac se torna obsoleta, dando lugar a teorias mais sofisticadas para uma entidade que denominamos como vácuo quântico.

BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

GREINER, W. **“Wave Equation for Spin $\frac{1}{2}$ Particles: the Dirac Equation.”** In: Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations. Disponível em: <[link de acesso](#)>.

LITTLEJOHN, R. **“Introduction to Dirac Equation”.** Notas de Aula: Berkeley Theoretical Physics Institute. Disponível em: <[link de acesso](#)>.

ZWIEBACH, B. **“Dirac equation for the electron and hydrogen Hamiltonian”.** MIT OpenCourseWare, 14 fev. 2019. Vídeo disponível em: <[link de acesso](#)>.