Distribuição amostral de proporção $\hat{p} = \frac{k}{n}$, || k - número de sucessos, n - tamanho de amostra

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{n}\,\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Exemplo: Se $n = 25$ e ~~...~~ $p = 0.8$

ⓐ $P(\hat{p} > 0.75) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \frac{0.75-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{0.75-0.8}{\sqrt{\frac{0.8*0.2}{25}}}\right) = P(Z > -0.625) = ?$

ⓑ $P(|\hat{p}-p| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \hat{p}-p \leq 0.1) = P\left(-\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.8*0.2}{25}}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{0.8*0.2}{25}}} \leq \frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.8*0.2}{25}}}\right)$

$$= P(-1.25 \leq Z \leq 1.25) = ?$$

Exemplo (casa) Se $n = 100$ ~~e~~ $k = 75$ e $p = 0.7$

Calcule $P(\hat{p} < 0.6) = ?$

$P(|\hat{p}-p| \leq 0.05) = ?$

$\boxed{\text{Como } E(\hat{p}) = p \text{ e } Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ a proporção amostral } \hat{p} \text{ é estimador não viesado e consistente para proporção populacional}}$

*

IC para p: $P(|\hat{p}-p| \leq \varepsilon) = (1-\gamma)100\%$; o erro ε deve ser pequeno, i.e. $\varepsilon \in (0,1)$

$\boxed{(1-\gamma)100\% \text{ IC para } p \text{ é } \left[\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,z_c,\ \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,z_c\right],\ z_c = z_{1-\frac{\gamma}{2}}}$

IC de p deve ser entre 0 e 1!

De $\underbrace{\varepsilon = z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{\text{margem de erro}}$ determinamos tamanho de amostra $\boxed{n = \frac{z_c^2\,\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2}}$

Exemplo: $n = 200$, $k = 120 \Rightarrow \hat{p} = \frac{k}{n} = 0.6$

ⓐ Determine 98% IC para p, i.e. $\gamma = 0.02 \Rightarrow z_{1-\frac{\gamma}{2}} = 2.33 = z_c$

$$98\%\ IC = \left[0.6 - \sqrt{\frac{0.6*0.4}{200}} * 2.33,\ 0.6 + \sqrt{\frac{0.6*0.4}{200}}\right] \simeq [0.5193, 0.6807]$$

ⓑ Qual seria o tamanho de amostra para se ter um erro $\varepsilon = 0.05$ com nível de confiança 98%?

$$n = \frac{z_c^2\,\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2} = \frac{(2.33)^2 \times 0.6 * 0.4}{(0.05)^2} \approx 522$$

Exemplo (casa) $n = 400$, $k = 100$

ⓐ Determine 80% IC para $p = ?$

ⓑ $n = ?$ tal que $\varepsilon = 0.02$