

Distribuições Amostrais de $\bar{X}$ e S^2

A população é caracterizada ^{v.a.} v.a. X , com $EX = \mu$ e $Var X = \sigma^2$ desconhecidos

O vetor amostral $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é constituído de v.a. independentes e identicamente distribuídos com X , i.e.

$$X_i \sim X, i=1, 2, \dots, n \Rightarrow E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2.$$

A média amostral $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e var. amostral $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Teorema: $E(\bar{X}) = \mu, Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

São variáveis aleatórias.

Exemplo 1 Seja $\begin{array}{c|c|c} X & -1 & 1 \\ \hline \text{Prob.} & 1/2 & 1/2 \end{array} \Rightarrow EX = 0 (= \mu)$
 $Var X = 1 (= \sigma^2)$

Uma amostra de tamanho $n=3$ é feita.

Obter distribuições de $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ e $S^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$

Solução:

A seguinte tabela apresenta as possíveis amostras.

(X_1, X_2, X_3)	Probabilidade	$\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$	$S^2 = \frac{1}{3-1} [(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2]$
$(-1, -1, -1)$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}(-1-1-1) = -1$	$\frac{1}{2} \{ [-1-(-1)]^2 + [-1-(-1)]^2 + [-1-(-1)]^2 \} = 0$
$(-1, -1, 1)$	$1/8$	$-1/3$	$4/3$
$(-1, 1, -1)$	$1/8$	$-1/3$	$4/3$
$(-1, 1, 1)$	$1/8$	$1/3$	$4/3$
$(1, -1, -1)$	$1/8$	$-1/3$	$4/3$
$(1, -1, 1)$	$1/8$	$1/3$	$4/3$
$(1, 1, -1)$	$1/8$	$1/3$	$4/3$
$(1, 1, 1)$	$1/8$	1	0

Verifique estes valores

Então

$\bar{X}$	-1	1/3	1/3	1
Prob.	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\Rightarrow E(\bar{X}) = 0 = (\mu = 0)$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{3} = \left(\frac{Var X}{n} = \frac{1}{3} \right)$$

(Conforme o Teorema)

S^2	0	4/3
Prob.	1/4	3/4

$$\Rightarrow E(S^2) = 1$$

Exemplo 2
(casa)

Seja $\begin{array}{c|c|c|c} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline \text{Prob.} & 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{array}$

Uma amostra de tamanho 2 é feita.

Obter distribuições de $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ e $S^2 = \frac{1}{2-1} [(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2]$