Opções Europeias

Ações são ativos financeiros negociados entre investidores e os retôrnos obtidos não são a priori definidos e dependem das condições de mercado. Por isso são chamados de ativos de renda variável. No mercado financeiro são também negociados outra classe de ativos os quais têm um retôrno pré-fixado, ou seja um investidor tem conhecimento a priori do retôrno que irá obter. Ativos com retôrno pré-fixado associados a entidades sólidas são muitas vezes considerados ativos livre de risco enquanto que ativos de renda variável são em geral chamados ativos de risco no sentido de que o retôrno realizado ao fim de um período pode ser maior ou menor quando comparado a um investimento equivalente em ativos livre de risco.

Em muitas situações pode ser interessante para um investidor mitigar riscos de um investimento em ativos de renda variável. Isto pode ser alcançado com a classe de ativos financeiros chamados de derivativos e entre estes se encontra as chamadas Opções Europeias .

Uma Opção de Compra Europeia consiste em um contrato entre duas partes no qual uma das partes adquire o direito de comprar, se assim o desejar, o ativo de renda variável, a ser entregue pela outra parte, em uma data futura e valor fixado definidos no contrato. Para tal, a parte que adquire o direito deve pagar um premio à parte que tem a obrigação de entregar o ativo. Uma vez celebrado, tal contrato pode ser negociado (repassando o direito de compra ou a obrigação de entrega) e portanto é considerado um ativo financeiro.

Uma Opção de Venda Europeia consiste em um contrato entre duas partes no qual uma das partes tem o direito de, se assim o desejar, exigir que a segunda parte compre o ativo de renda variável em uma data futura e valor fixado definidos no contrato. Para tal, a parte que adquire o direito de exigir a compra deve pagar um premio à parte que tem a obrigação de comprar o ativo. Uma vez celebrado, tal contrato pode ser negociado (repassando o venda de compra ou a obrigação de comprar) e portanto é considerado um ativo financeiro.

Como exemplo em que tais contratos podem ser vistos como intrumentos financeiros utilizados na mitigação de riscos, considere um investidor que tem a obrigação de fazer um pagamento em moeda estrangeira em uma data futura T. Para mitigar riscos devido às variações futuras no mercado de moedas, o investidor atrves de uma Opção de Compra Europeia adquire o direito de comprar a moeda estrangeira na data T por um valor valor K. Desta forma mesmo se a cotação na data K esteja acima de K, o investidor tem a garantia de horar seu pagamento pagando o valor K pela moeda estrangeira.

Como um outro exemplo podemos considerar o caso de um investidor que possui ações de uma dada companhia e tem a intenção de vender suas ações em uma data futura T. Para mitigar o risco de uma queda inesperada no valor da ação, este investidor pode adquirir uma Opção de Venda Européia através da qual a contra parte tem a obrigação de comprar a ação por um valor K, mesmo que a cotação na data seja menor.

Uma questão fundamental que se coloca refere-se ao valor do Premio que deve ser pago por estes contratos.

Para responder a esta questão devemos considerar os possíveis retôrnos que podem ser obtidos na data de vencimento (maturidade) da opção juntamente com as respectivas probabilidades. Por exemplo, denominando por S_T os possíveis valores do ativo base (ativo de renda variável) na data T, o retôrno do investimento (Premio) no caso de uma Opção de Compra é:

$$[S_T - K]_+ = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad S_T \leq K \\ S_T - K & \text{se} \quad S_T > K \end{cases}$$

Supondo que temos um ativo livre de risco para referência com taxa de retôrno r, para cada possível retôrno do investimento na Opção na data futura T, definido pelo valor de S_T, o valor presente deste retôrno é:

$$e^{-r(T-t)}[S_T - K]_+$$

(t data atual)

Por outro lado se

$$E_t\left\{f(S_T)\right\} = \int_0^\infty f(S_T)d\mu_t(S_T)$$

denota a esperança na data atual t de uma função da variável aleatória S_T, temos que o valor do Premio C_t a ser pago pelo contrato é:

$$C_t = E_t \left\{ e^{-r(T-t)}[S_T - K]_+ \right\}$$

Em 1973 Fischer Black; Myron Scholes e Robert C. Merton publicaram o artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* no *Journal of Political Economy* onde apresentam um modelo dinâmico para o cálculo de$E_t \{\cdot\}$. Como consequência, do que ficou conhecido como modelo de Black-Scholes, o Premio a ser pago por uma Opção de Compra Europeia é:

$$C_t(T,K,S_t,r;\sigma) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

onde

$$\begin{array}{rl} t & \text{- data atual} \\ T & \text{- data de exercício} \\ K & \text{- preço de exercício} \\ S_t & \text{- preço do ativo base na data atual} \\ r & \text{- taxa livre de risco} \\ \sigma & \text{- volatilidade do ativo base no período entre } t \text{ e } T \end{array}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Para utlizar a fórmula de Black e Sholes que fornece o premio a ser pago por uma opção. $C_t(T, K, S_t, r; \sigma)$ temos que ter conhecimento dos valores de todas as variáveis t, T, K, S_t, r e σ. Se por um lado os valores de T, K, S_t, r podem ser obtidos de quotações disponíveis no mercado (bolsa de valores), o valor de σ refere-se à volatilidade da variável aleatória S_t durante o período entre a data atual t e a data de vencimento (futura) da opção T.

Por outro lado os contratos de opções em alguma situações são negociados em bolsa de valores de quotações para $C_t(T, K, S_t, r; \sigma)$ podem ser obtidas no mercado de derivativos (bolsas de derivativos). Assim para uma da quotação de mercado para o valor de uma opção $\bar{C}_t$, uma maneira de obter uma previsão para σ é determinar o valor de $\bar{\sigma}$ (Volatilidade Implicita) para o qual:

$$C_t(T, K, S_t, r; \bar{\sigma}) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) = \bar{C}_t$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(\bar{\sigma}) = C_t(T, K, S_t, r; \bar{\sigma}) - \bar{C}_t = 0$$

Exercício

Neste exercício deve ser elaborado um programa que:

- Para valores dados das variáveis t, T, K, S_t, r e $\bar{\sigma}$ calcula o resultado de

$$C_t(T, K, S_t, r; \sigma) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

(*para obter os valores de* $N(d_1)$ *e* $N(d_2)$ *o programa deve utilizar o método de Simpson*).

- Obtém uma aproximação da solução do valor da volatilidade implicita $\bar{\sigma}$, solução de:

$$C_t(T, K, S_t, r; \bar{\sigma}) - \bar{C}_t = 0$$

utilizando o Método de Newton para zero de funções.

Buscar exemplos reais de quotações e utilizar o seu programa para obter valores da volatilidade implicita. Comentar os resultados obtidos.