1. **Modelo** - Uma formulação explicita da dependência de y em função das variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_\ell)$, expressa em termos de um conjunto de parâmetros $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$; $\quad a_k \in \mathbb{R}$ e, uma família de funções $\{g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\}$; $g_k() : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$.

$$y = f(\mathbf{x}) = a_0 g_0(\mathbf{x}) + a_1 g_1(\mathbf{x}) + \ldots + a_m g_m(\mathbf{x})$$

2. **Resultados Empíricos** (*caso discreto*)
Consiste em um conjunto de dados obtidos pela observação de valores da variável dependente y para diferentes valores das variáveis independentes $\mathbf{x}$,
$\left\{(\mathbf{x}^i, y_i)\right\}_{i=1,\ldots,n}$; $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^\ell$; $y_i \in \mathbb{R}$.

Para definir um citério de melhor ajuste (*escolha dos parâmetros* $a_0, ..., a_m$) , para cada valor x^i; $i = 1, ..., n$ da variável independente, consideramos o quadrado da diferença entre os valores obtidos y_i e os valores previstos pelos modelo para cada um dos valores x^i

$$y(x^i) = a_0 g_0(x^i) + \ldots + a_m g_m(x^i)$$

(*dependentes da escolha dos parâmetros* $a_0, ..., a_m$)

$$\left(y_i - y(x^i)\right)^2 =$$

$$\left(y_i - [a_0 g_0(x^i) + \ldots + a_m g_m(x^i)]\right)^2; \quad i = 1, ..., n$$

A partir de $\left(y_i - y(x^i)\right)^2$ definimos a função $EQ(a_0, \ldots, a_m)$:

$$EQ(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - [a_0 g_0(x^i) + \ldots + a_m g_m(x^i)]\right)^2$$

Valores de $a_0, \ldots, a_m$ para os quais $EQ(a_0, \ldots, a_m)$ é mínimo correspondem a um melhor ajuste.

Para obter $a_0, ..., a_m$ para os quais $EQ(a_0, ..., a_m)$ é mínimo devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial EQ}{\partial a_0}(a_0, ..., a_m) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial EQ}{\partial a_m}(a_0, ..., a_m) = 0 \end{cases}$$

Como a função $EQ(a_0, ..., a_m)$ é uma função quadrática nas variáveis $a_0, ..., a_m$, as derivadas parciais $\frac{\partial EQ}{\partial a_j}(a_0, ..., a_m)$; $j = 0, ...m$ são funções lineares e portanto o sistema de equações acima consiste em um sistema linear com $m+1$ equações e $m+1$ incógnitas $a_0, ..., a_m$.

Observe também que $EQ(a_0, ..., a_m)$ é uma função não negativa e portanto o sistema de equações que define os pontos críticos de $EQ(a_0, ..., a_m)$ tem solução(ões) que correspondem a pontos de mínimo.

A unicidade do *melhor ajuste* (unicidade do ponto crítico) é assegurada com condições adicionais envolvendo a familia de funções $\{g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\}$ e os Resultados Empíricos $\{(\mathbf{x}^i, y_i)\}_{i=1,...,n}$.

Sistema Normal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial EQ}{\partial a_0}(a_0, ..., a_m) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial EQ}{\partial a_m}(a_0, ..., a_m) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_j}(a_0, ..., a_m) = \frac{\partial}{\partial a_j}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - [a_0 g_0(x^i) + \ldots + a_m g_m(x^i)]\right)^2\right\} =$$

$$-2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - [a_0 g_0(x^i) + \ldots + a_m g_m(x^i)]\right)\right\} g_j(x^i)$$

Assim

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_j}(a_0, \ldots, a_m) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_j(x^i) g_0(x^i) a_0 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} g_j(x^i) g_m(x^i) a_m = \sum_{i=1}^{n} g_j(x_i) y_i$$

O sistema ($j = 0, \ldots, m$) de equações lineares nas variáveis $a_0, \ldots, a_m$, é chamado de Sistema Normal.

Notação

$$\langle g_j \mid g_k \rangle := \sum_{i=1}^{n} g_j(x^i) g_k(x^i)$$

$$\langle g_j \mid y \rangle := \sum_{i=1}^{n} g_k(x^i) y_i$$

observe que $\langle g_j \mid g_k \rangle = \langle g_k \mid g_j \rangle$

Com esta notação o Sistema Normal pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} \langle g_0 \mid g_0\rangle a_0 & + & \langle g_0 \mid g_1\rangle a_1 & \dots & + & \langle g_0 \mid g_m\rangle a_m & = & \langle g_0 \mid y\rangle \\ \langle g_1 \mid g_0\rangle a_0 & + & \langle g_1 \mid g_1\rangle a_1 & \dots & + & \langle g_1 \mid g_m\rangle a_m & = & \langle g_1 \mid y\rangle \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle g_m \mid g_0\rangle a_0 & + & \langle g_m \mid g_1\rangle a_1 & \dots & + & \langle g_m \mid g_m\rangle a_m & = & \langle g_m \mid y\rangle \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \langle g_0 \mid g_0\rangle & \langle g_0 \mid g_1\rangle & \dots & \langle g_0 \mid g_m\rangle \\ \langle g_1 \mid g_0\rangle & \langle g_1 \mid g_1\rangle & \dots & \langle g_1 \mid g_m\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle g_m \mid g_0\rangle & \langle g_m \mid g_1\rangle & \dots & \langle g_m \mid g_m\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0 \mid y\rangle \\ \langle g_1 \mid y\rangle \\ \vdots \\ \langle g_m \mid y\rangle \end{pmatrix}$$

Exemplo

1. **Modelo**:

$$v(t) = a_0 g_0(t) + a_1 g_1(t)$$

$$g_0(t) = 1; \quad g_1(t) = t$$

2. **Resultados Empíricos**

i	t^i	v_i
1	0	0.5
2	1	11
3	2	19.7
4	3	33.7
5	4	40.3

Sistema Normal

$$\begin{pmatrix} \langle g_0 \mid g_0 \rangle & \langle g_0 \mid g_1 \rangle \\ \langle g_1 \mid g_0 \rangle & \langle g_1 \mid g_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0 \mid y \rangle \\ \langle g_1 \mid y \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle g_0 \mid g_0 \rangle =$$

$$g_0(t_1) \cdot g_0(t_1) + g_0(t_2) \cdot g_0(t_2) + g_0(t_3) \cdot g_0(t_3) + g_0(t_4) \cdot g_0(t_4) + g_0(t_5) \cdot g_0(t_5)$$

$$\langle g_0 \mid g_0 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5$$

$$\langle g_0 \mid g_1 \rangle = \langle g_1 \mid g_0 \rangle$$

$$g_0(t_1) \cdot g_1(t_1) + g_0(t_2) \cdot g_1(t_2) + g_0(t_3) \cdot g_1(t_3) + g_0(t_4) \cdot g_1(t_4) + g_0(t_5) \cdot g_1(t_5)$$

$$\langle g_0 \mid g_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$$

$$\langle g_1 \mid g_1 \rangle =$$

$$g_1(t_1) \cdot g_1(t_1) + g_1(t_2) \cdot g_1(t_2) + g_1(t_3) \cdot g_1(t_3) + g_1(t_4) \cdot g_1(t_4) + g_1(t_5) \cdot g_1(t_5)$$

$$\langle g_1 \mid g_1 \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$$

$$\langle g_0 \mid y \rangle =$$

$$g_0(t_1) \cdot y_1 + g_0(t_2) \cdot y_2 + g_0(t_3) \cdot y_3 + g_0(t_4) \cdot y_4 + g_0(t_5) \cdot y_5$$

$$\langle g_0 \mid y \rangle = 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 19.7 + 1 \cdot 33.7 + 1 \cdot 40.3 = 105.2$$

$$\langle g_1 \mid y \rangle =$$

$$g_1(t_1) \cdot y_1 + g_1(t_2) \cdot y_2 + g_1(t_3) \cdot y_3 + g_1(t_4) \cdot y_4 + g_1(t_5) \cdot y_5$$

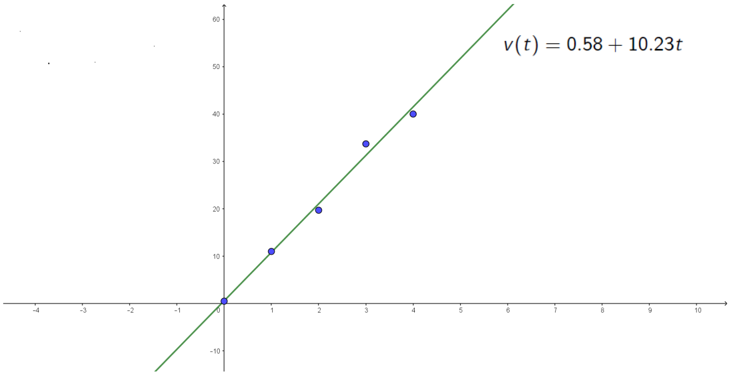
$$\langle g_1 \mid y \rangle = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 19.7 + 3 \cdot 33.7 + 4 \cdot 40.3 = 312.7$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105.2 \\ 312.7 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{105.2 \cdot 30 - 10 \cdot 312.7}{5 \cdot 30 - 10 \cdot 10} = 0.58$$

$$a_1 = \frac{5 \cdot 312.7 - 105.2 \cdot 10}{5 \cdot 30 - 10 \cdot 10} = 10.23$$

Melhor Ajuste: $v(t) = 0.58 + 10.23t$


$v(t) = 0.58 + 10.23t$
60
50
40
30
20
10
-10
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10