Nesta seção, dada equação $f(x) = 0$, para a qual temos a solução de interesse $\bar{x}$ isolada em um intervalo $[a, b]$, vamos discutir uma escolha conveniente de uma função $\phi(x)$.

Nosso objetivo é definir um problema de ponto fixo $x = \phi(x)$ equivalente à equação $f(x) = 0$ no sentido de que no intervalo $[a, b]$, $\bar{x}$ é solução única tanto de $f(x) = 0$ como de $x = \phi(x)$.

Primeiro observamos que no algoritmo das Aproximações Sucessivas, temos

$$| \bar{x} - x_k | \leq | \phi'(\eta) || \bar{x} - x_{k-1} |$$

e portanto quanto menor o valor de $| \phi'(\eta) |$ menor é o resultado de $| \bar{x} - x_k |$ comparado com $| \bar{x} - x_{k-1} |$.

Isto sugere que se escolhermos $\phi(x)$ de forma que $\mid \phi'(x) \mid$ seja pequeno, o algoritmo das Aproximações Sucessivas deve ser mais eficiente no sentido de uma convergência mais rápida.

Considerando funções da forma

$$\phi(x) = x + A(x)f(x)$$

onde $A(x)$ é uma função que não se anula no intervalo $[a, b]$, temos a equivalência

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

Desta forma podemos proceder escolhendo uma função $A(x)$ conveniente para definir $\phi(x)$.

Vamos escolher $A(x)$ de forma que para $x = \bar{x}$, $\phi'(\bar{x}) = 0$.
Observando que:

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \implies \phi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

e para obter $\phi'(\bar{x}) = 0$ temos a seguinte condição para a função $A(x)$

$$\phi'(\bar{x}) = 1 + A'(\bar{x})f(\bar{x}) + A(\bar{x})f'(\bar{x}) = 0 \implies$$

$$A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$$

pois $f(\bar{x}) = 0$.

Portanto, definindo

$$\phi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x)$$

temos no intervalo $[a, b]$

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

e para $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$,

$$\phi'(\bar{x}) = 0$$

Uma representação gráfica em termos da função $f(x)$, é obtida observando que:

$$x_k = \phi(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{1}{f'(x_{k-1})} f(x_{k-1})$$

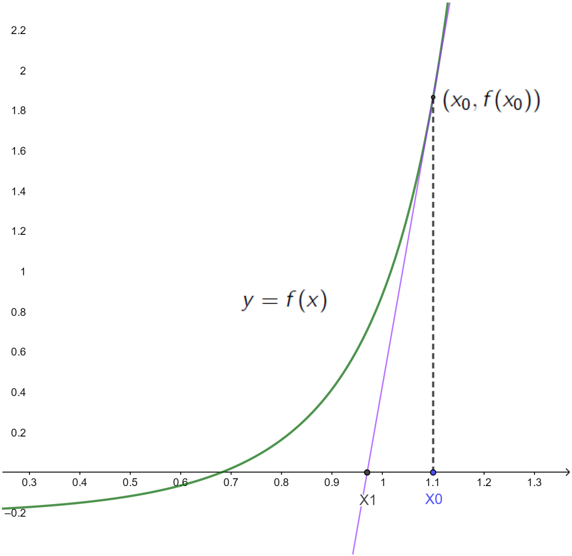
$\Longrightarrow$

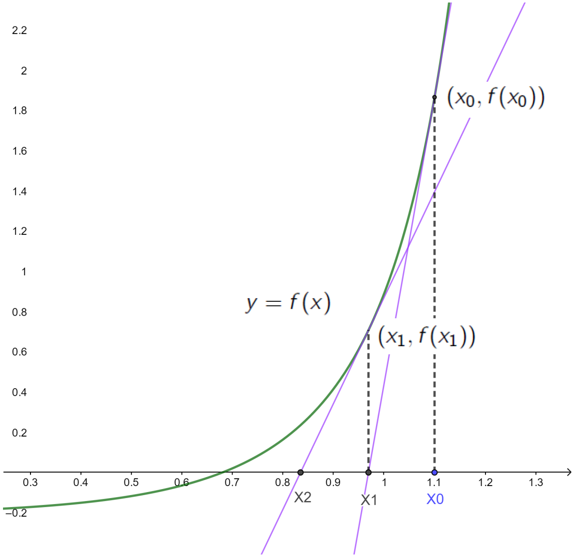
$$0 - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

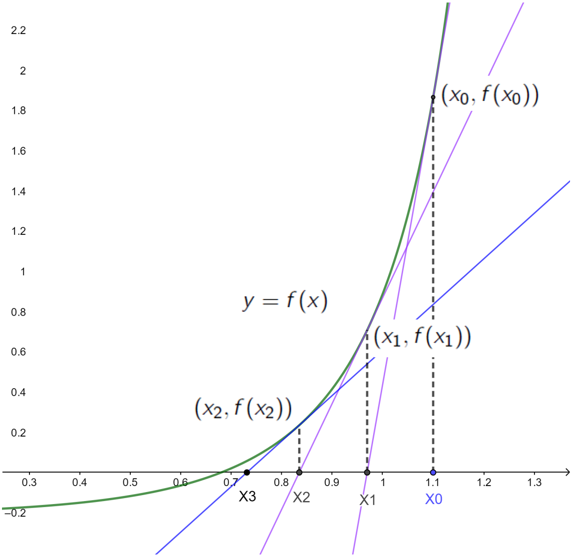
de onde temos que, considerando a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0)$, definida por $(k-1=0)$

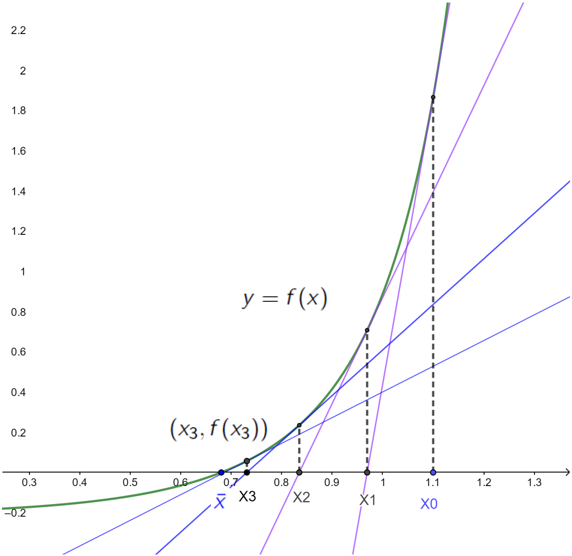
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ambos os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, 0))$ são pontos pertencentes ao gráfico desta reta.


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$y = f(x)$
X1
X0


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$y = f(x)$
$(x_1, f(x_1))$
X2
X1
X0


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$y = f(x)$
$(x_1, f(x_1))$
$(x_2, f(x_2))$
X3
X2
X1
X0


$y = f(x)$
$(x_3, f(x_3))$
$\bar{X}$
X3
X2
X1
X0
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3

Questões:

- A condição $\phi'(\bar{x}) = 0$ não assegura que $\max_{\chi \in [a,b]} | \phi'(\chi) | < 1$. Existe alguma alternativa a esta condição que assegure $x_k \longrightarrow \bar{x}$?
- Em caso afirmativo, qual seria uma escolha de x_0?
- Sem a condição $\max_{\chi \in [a,b]} | \phi'(\chi) | < 1$, como estimar $| \bar{x} - x_k |$?

Dada uma função $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida a partir de uma escolha de $x_0 \in [a, b]$, por:

$$x_k = \phi(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{1}{f'(x_{k-1})} f(x_{k-1})$$

converge para $\bar{x} \in [a, b]$, solução de $f(x) = 0$, quando as seguintes hipóteses estão satisfeitas:

- $\bar{x} \in [a, b]$ é a única solução de $f(x) = 0$ em $[a, b]$
- $f(x) \in C^2\,[a, b]$ (i.e. em $[a, b]$ a primeira e a segunda derivadas de $f(x)$ estão definidas e são funções contínuas).
- A primeira e segunda derivadas de $f(x)$ satisfazem:

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad f''(x) \neq 0; \quad \forall x \in [a, b]$$

  ou seja, no intervalo $[a, b]$ a função $f(x)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente e tem concavidade definida.
- x_0 é o extremo de $[a, b]$ onde $f(x)f''(x) > 0$

Para entendermos porque estas hipóteses implicam na convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, primeiro observamos que:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left\{x - \frac{1}{f'(x)}f(x)\right\} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Considerando que $f''(x) \neq 0; \quad \forall x \in [a,b]$, o produto $f(x)f''(x)$ satisfaz:

- Em $[a,b]$, $\bar{x}$ é o único valor para o qual $f(\bar{x})f(\bar{x}) = 0$

e portanto, em $[a,b]$, $\phi'(x)$ tem uma única mudança de sinal, a qual ocorre em $\bar{x}$

Temos que:

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0)$$

Escohendo x_0 como o extremo de $[a, b]$ onde $f(x)f''(x) > 0$:

- Se $x_0 = a$ e $f(x_0) < 0$
  temos

$$f'(x_0) > 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > x_0$$

Temos também que

$$x_0 < x_1 < \bar{x}$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [a, \bar{x}]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[a, \bar{x}]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) > 0$$

e portanto

$$\bar{x} - x_1 > 0$$

- Se $x_0 = a$ e $f(x_0) > 0$
  temos

$$f'(x_0) < 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > x_0$$

Temos também que

$$x_0 < x_1 < \bar{x}$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [a, \bar{x}]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[a, \bar{x}]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) > 0$$

e portanto

$$\bar{x} - x_1 > 0$$

- Se $x_0 = b$ e $f(x_0) < 0$
  temos

$$f'(x_0) < 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < x_0$$

Temos também que

$$\bar{x} < x_1 < x_0$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [\bar{x}, b]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[\bar{x}, b]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) < 0$$

e portanto

$$x_1 - \bar{x} > 0$$

- Se $x_0 = b$ e $f(x_0) > 0$
  temos

$$f'(x_0) > 0 \quad \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) > 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0) < x_0$$

Temos também que

$$\bar{x} < x_1 < x_0$$

onde a última desigualdade é consequência de que $\exists \eta \in [\bar{x}, b]$ tal que:

$$\bar{x} - x_1 = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_0)$$

Como em $[\bar{x}, b]$, $\phi'(x) > 0$ temos

$$\phi'(\eta)(\bar{x} - x_0) < 0$$

e portanto

$$\bar{x} < x_1$$

A seguir verificamos que com as hipóteses consideradas, no algoritmo de Newton Raphson a convergência é quadrática

$$\bar{x} - x_k = \phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1}) =$$

Devido ao fato de que $f(x) \in C^2\,[a,b]$ e $f'(x) \neq 0$;
$\phi(x) \in C^2\,[a,b]$ e portanto existe $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\phi(x_{k-1}) = \left\{\phi(\bar{x}) + \cancelto{0}{\phi'(\bar{x})}(x_{k-1} - \bar{x}) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x_{k-1} - \bar{x})^2\right\}$$

$\Longrightarrow$

$$\phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1}) = -\frac{1}{2}\phi''(\xi)(\bar{x} - x_{k-1})^2$$

$\Longrightarrow$

$$|\,\bar{x} - x_k\,| = \frac{1}{2}\,|\,\phi''(\xi)\,|\,|\,\bar{x} - x_{k-1}|^2$$

Exemplo em que o algoritimo de Newton Raphson não produz sequências convergentes