No Método das Aproximações Sucessivas para obter soluções numéricas de equações de ponto fixo ($x = \phi(x)$), nós temos:

$$\bar{x} = \phi(\bar{x}); \quad x_k = \phi(x_{k-1})$$

e portanto

$$\bar{x} - x_k = \phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1})$$

$$\bar{x} - x_k = \frac{\phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1})}{\bar{x} - x_{k-1}}(\bar{x} - x_{k-1})$$

$$\Longrightarrow \bar{x} - x_k = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_{k-1})$$

onde, a existência de um valor η no intervalo definido por $\bar{x}$ e x_{k-1} é assegurado pelo *Teorema do Valor Médio*.

para

$$K = \max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid$$

queremos utilizar a estimativa:

$$\mid \bar{x} - x_{k-1} \mid \leq K \mid \bar{x} - x_{k-2} \mid \tag{1}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Isto só é possível se todos os valores de x_k, definidos a partir de x_0 por $x_k = \phi(x_{k-1})$, satisfizerem $x_k \in [a, b]\,; \forall k \in \mathbb{N}$

Com a hipótese de que $K < 1$, nós podemos assegurar que se escolhermos x_0 como o extremo do intervalo $[a, b]$ que está situado mais próximo da solução exata $\bar{x}$, temos que $x_k \in [a, b]\,; \forall k \in \mathbb{N}$.

Para tanto considere o caso em que o extremo a é o mais próximo de $\bar{x}$. Temos então, $x_0 = a$ e:

$$| \bar{x} - x_1 | \leq K | \bar{x} - a | .$$

Porque $K < 1$, a distância entre x_1 e $\bar{x}$ é menor do que a distância entre a e $\bar{x}$ e, porque $\bar{x} > a$ podemos também concluir que $x_1 > a$.

Se $x_1 > b > \bar{x}$, temos $| \bar{x} - b | < | \bar{x} - x_1 |$ e, porque $K < 1$, $| \bar{x} - b | < | \bar{x} - x_1 | < | \bar{x} - a |$, contrariando a hipótese de que a é o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$.
Podemos então afirmar que $x_1 \in [a, b]$ e que a distância entre x_1 e $\bar{x}$ é menor que as distâncias $| x_1 - a |$ e $| x_1 - b |$.

Desta forma $\bar{x} \in [a, x_1]$ ou $\bar{x} \in [x_1, b]$ e em ambos os casos x_1 é o extremo mais próximo de $\bar{x}$.

- Uma análise equivalente pode ser desenvolvida a partir da hipótese de que b é o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$.
- Assim, com a hipótese de que $K < 1$, este argumento pode ser iterado levando à conclusão de que:
  Com a escolha de x_0 como o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$, temos

$$x_k \in [a, b] \,; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Para determinar qual dos extremos, a ou b, de $[a, b]$ é o mais próximo de $\bar{x}$, calculamos $\phi(\frac{a+b}{2})$.
Como

$$\frac{a+b}{2} \in [a, b] \implies |\ \bar{x} - \phi(\frac{a+b}{2})\ | \leq K\ |\ \bar{x} - \frac{a+b}{2}\ |$$

Temos então

- Se $\phi(\frac{a+b}{2}) < \frac{a+b}{2}$ temos que a é o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$
- Se $\phi(\frac{a+b}{2}) > \frac{a+b}{2}$ temos que b é o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$

E desta forma, quando $K = \max_{\chi \in [a,b]} |\ \phi'(\chi)\ | < 1$ temos um algoritmo para escolher x_0 de forma a assegurar que para $x_k = \phi(x_{k-1})$; $x_k \in [a, b] \forall k \in \mathbb{N}$

Para uma dada precisão ϵ, nós podemos estimar um número de iterações, n, que assegura

$$| \bar{x} - x_n | \leq \epsilon \quad ,$$

utilizando a estimativa

$$| \bar{x} - x_k | \leq K^k | \bar{x} - x_0 |$$

Considerando n o menor inteiro tal que

$$| \bar{x} - x_n | \leq K^n | \bar{x} - x_0 | \leq K^n \left\{ \frac{b-a}{2} \right\} \leq \epsilon \quad ,$$

temos que x_n é uma solução numérica com precisão ϵ para equação de ponto fixo $x = \phi(x)$.
Para:

$$n \geq \frac{\ln(\frac{2\epsilon}{b-a})}{\ln(K)}$$

temos

$$| \bar{x} - x_n | \leq \epsilon$$

EXERCÍCIO

Mostre que no algoritmo das Aproximaçoes Sucessivas com as hipóteses

- $\phi(x)$ é uma função contínua e diferenciável no intervalo $[a, b]$
- $\exists! \bar{x} \in [a, b]$ tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$
- $K = \max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid < 1$
- x_0 escolhido como o extremo de $[a, b]$ mais próximo de $\bar{x}$,
- $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}\, ; \quad x_k = \phi(x_{k-1})$

temos

$$\mid \bar{x} - x_k \mid \leq \frac{K}{1 - K} \mid x_k - x_{k-1} \mid$$

Nesta seção, dada equação $f(x) = 0$, para a qual temos a solução de interesse $\bar{x}$ isolada em um intervalo $[a, b]$, vamos discutir uma escolha conveniente de uma função $\phi(x)$.

Nosso objetivo é definir um problema de ponto fixo $x = \phi(x)$ equivalente à equação $f(x) = 0$ no sentido de que no intervalo $[a, b]$, $\bar{x}$ é solução única tanto de $f(x) = 0$ como de $x = \phi(x)$.

Primeiro observamos que no algoritmo das Aproximações Sucessivas, temos

$$| \bar{x} - x_k | \leq | \phi'(\eta) || \bar{x} - x_{k-1} |$$

e portanto quanto menor o valor de $| \phi'(\eta) |$ menor é o resultado de $| \bar{x} - x_k |$ comparado com $| \bar{x} - x_{k-1} |$.

Isto sugere que se escolhermos $\phi(x)$ de forma que $\mid \phi'(x) \mid$ seja pequeno, o algoritmo das Aproximações Sucessivas deve ser mais eficiente no sentido de uma convergência mais rápida.

Considerando funções da forma

$$\phi(x) = x + A(x)f(x)$$

onde $A(x)$ é uma função que não se anula no intervalo $[a, b]$, temos a equivalência

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

Desta forma podemos proceder escolhendo uma função $A(x)$ conveniente para definir $\phi(x)$.

Vamos escolher $A(x)$ de forma que para $x = \bar{x}$, $\phi'(\bar{x}) = 0$. Observando que:

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \implies \phi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

e para obter $\phi'(\bar{x}) = 0$ temos a seguinte condição para a função $A(x)$

$$\phi'(\bar{x}) = 1 + A'(\bar{x})f(\bar{x}) + A(\bar{x})f'(\bar{x}) = 0 \implies$$

$$A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$$

pois $f(\bar{x}) = 0$.

Portanto, definindo

$$\phi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x)$$

temos no intervalo $[a, b]$

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

e para $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$,

$$\phi'(\bar{x}) = 0$$

Uma representação gráfica em termos da função $f(x)$, é obtida observando que:

$$x_k = \phi(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{1}{f'(x_{k-1})} f(x_{k-1})$$

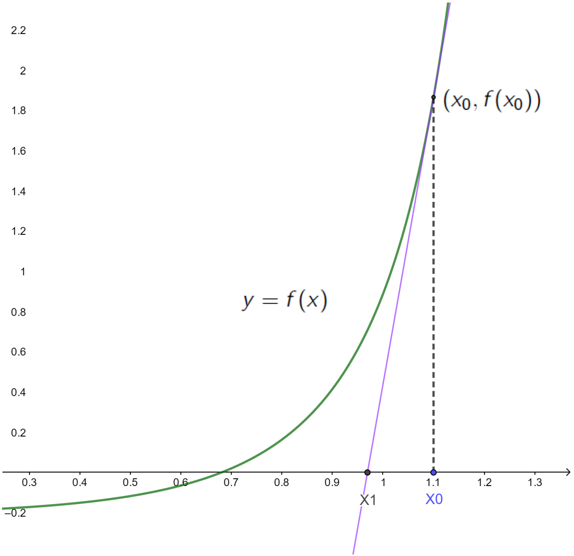
$\Longrightarrow$

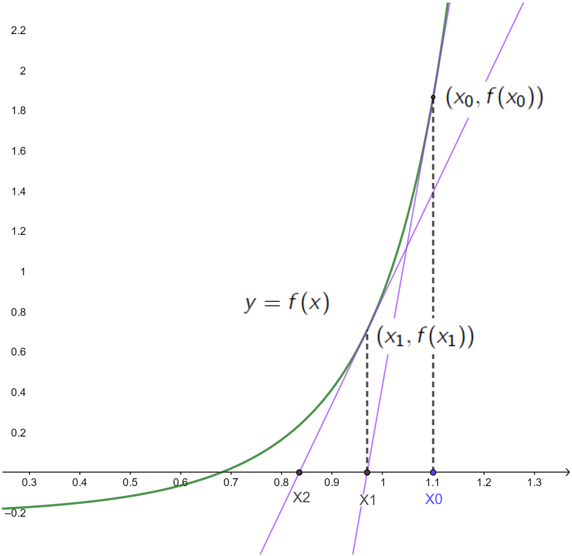
$$0 - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

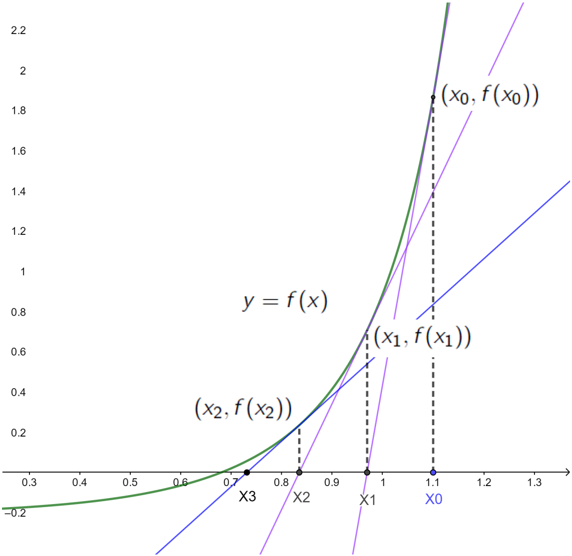
de onde temos que, considerando a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0)$, definida por $(k-1=0)$

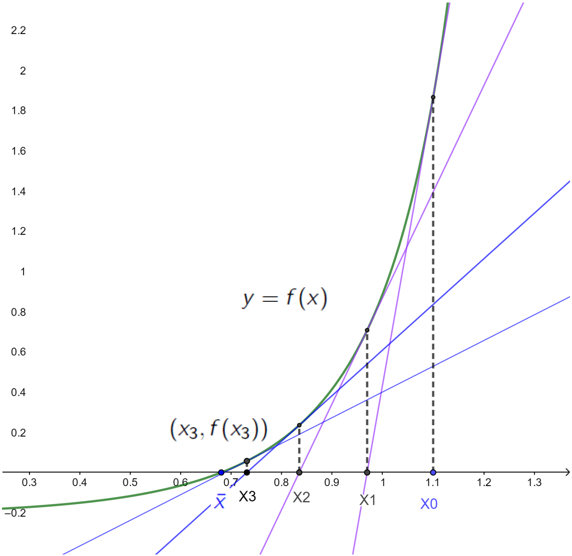
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ambos os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, 0))$ são pontos pertencentes ao gráfico desta reta.


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$y = f(x)$
X1
X0


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$(x_1, f(x_1))$
$y = f(x)$
X2
X1
X0


2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$(x_0, f(x_0))$
$y = f(x)$
$(x_1, f(x_1))$
$(x_2, f(x_2))$
X3
X2
X1
X0


$y = f(x)$
$(x_3, f(x_3))$
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
$\bar{X}$
X3
X2
X1
X0

Questões:

- A condição $\phi'(\bar{x}) = 0$ não assegura que $\max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid < 1$. Existe alguma alternativa a esta condição que assegure $x_k \longrightarrow \bar{x}$?

- Em caso afirmativo, qual seria uma escolha de x_0?

- Sem a condição $\max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid < 1$, como estimar $\mid \bar{x} - x_k \mid$?