Aproximações Sucessivas

A utilização de um Algoritmo de Aproximações Sucessivas para obter uma solução numérica com precisão ϵ de uma equação do tipo $f(x) = 0$ consiste dos seguintes passos:

A utilização de um Algoritmo de Aproximações Sucessivas para obter uma solução numérica com precisão ϵ de uma equação do tipo $f(x) = 0$ consiste dos seguintes passos:

- Considerando a solução de interesse, $\bar{x}$, da equação $f(x) = 0$, determinar um intervalo $[a, b]$ tal que $\bar{x}$ é o único valor da variável x no intervalo $[a, b]$ satisfazendo $f(\bar{x}) = 0$.

A utilização de um Algoritmo de Aproximações Sucessivas para obter uma solução numérica com precisão ϵ de uma equação do tipo $f(x) = 0$ consiste dos seguintes passos:

- Considerando a solução de interesse, $\bar{x}$, da equação $f(x) = 0$, determinar um intervalo $[a, b]$ tal que $\bar{x}$ é o único valor da variável x no intervalo $[a, b]$ satisfazendo $f(\bar{x}) = 0$.

- Definir uma função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de forma que no intervalo $[a, b]$ temos:

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

A utilização de um Algoritmo de Aproximações Sucessivas para obter uma solução numérica com precisão ϵ de uma equação do tipo $f(x) = 0$ consiste dos seguintes passos:

- Considerando a solução de interesse, $\bar{x}$, da equação $f(x) = 0$, determinar um intervalo $[a, b]$ tal que $\bar{x}$ é o único valor da variável x no intervalo $[a, b]$ satisfazendo $f(\bar{x}) = 0$.

- Definir uma função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de forma que no intervalo $[a, b]$ temos:

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

- Utilizar um algoritmo de Aproximações Sucessivas para obter uma solução numérica da equação de ponto fixo

$$x = \phi(x)$$

com a precisão ϵ.

No exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, consideramos $[a, b] = [0.0, 1.0]$; verificamos que:

No exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, consideramos $[a, b] = [0.0, 1.0]$; verificamos que:

- $$\exists! \bar{x} \in [0.0, 1.0] \mid f(\bar{x}) = 0$$

No exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, consideramos $[a, b] = [0.0, 1.0]$; verificamos que:

- $$\exists! \bar{x} \in [0.0, 1.0] \mid f(\bar{x}) = 0$$
- Observamos que para $\phi(x) = e^{-x}$ temos:

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x); \quad x \in [0.0, 1.0]$$

No exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, consideramos $[a, b] = [0.0, 1.0]$; verificamos que:

- $$\exists! \bar{x} \in [0.0, 1.0] \mid f(\bar{x}) = 0$$
- Observamos que para $\phi(x) = e^{-x}$ temos:
$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x); \quad x \in [0.0, 1.0]$$
- A partir de escolhas de um valor $x_0 \in [0.0, 1.0]$, implementamos o procedimento iterativo:
$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$
para obter sequências $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$.

Aparentemente as sequências, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, geradas a partir dos valores escolhidos para x_0 satisfazem:

$$x_k \to \bar{x}$$

Algumas questões devem ser consideradas neste ponto:

- A escolha de $\phi(x) = e^{-x}$ não é única, No exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, se considerarmos

  $$\phi(x) = x - \frac{x - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

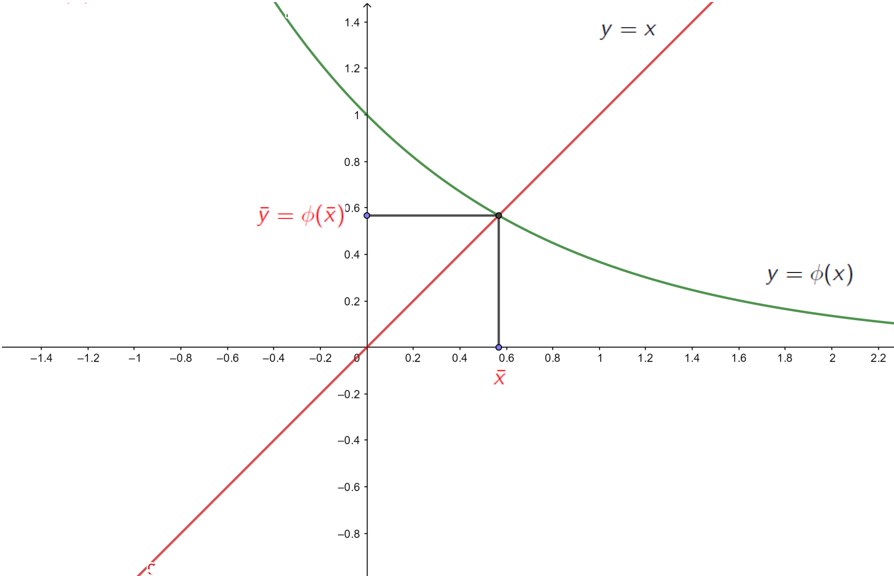
  também temos $f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$. A não unicidade de $\phi(x)$ nos traz a questão sobre critérios de escolha do problema de ponto fixo, $x = \phi(x)$ equivalente ao problema de zero de funções $f(x) = 0$.

- Considerando um particular $\phi(x)$, para quais escolhas de x_0 a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,; \quad x_{k+1} = \phi(x_k)$, converge para $\bar{x}$, solução de $x = \phi(x)$?
- Considerando que as únicas informações que temos de $\bar{x}$ são: $f(\bar{x}) = 0$ e $\bar{x} \in [a, b]$; como obter estimativas de $\mid \bar{x} - x_k \mid$?.

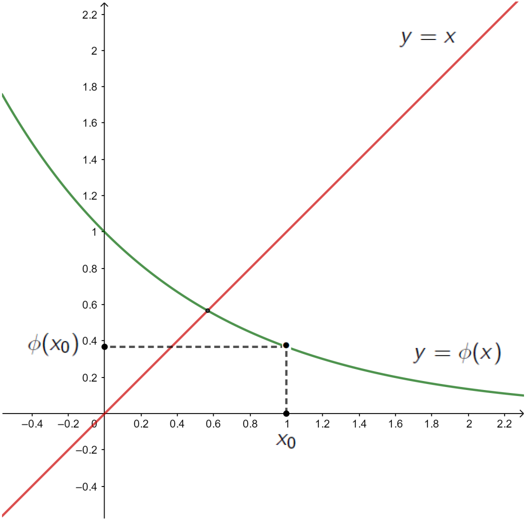
Para responder a estas questões vamos analisar qualitativamente a "dinâmica" do processo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$, considerarando situações distintas variando propriedades qualitativas da função $\phi(x)$, como crescimento e concavidade.

Nesta análise qualitativa vamos representar tanto a função como a dinâmica de forma gráfica.

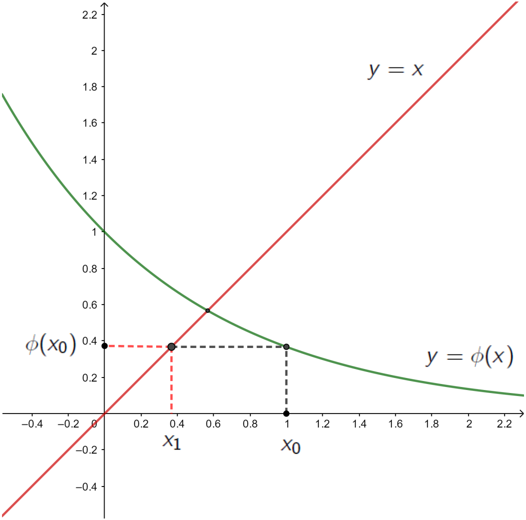
- $\phi(x)$ uma função convexa decrescente



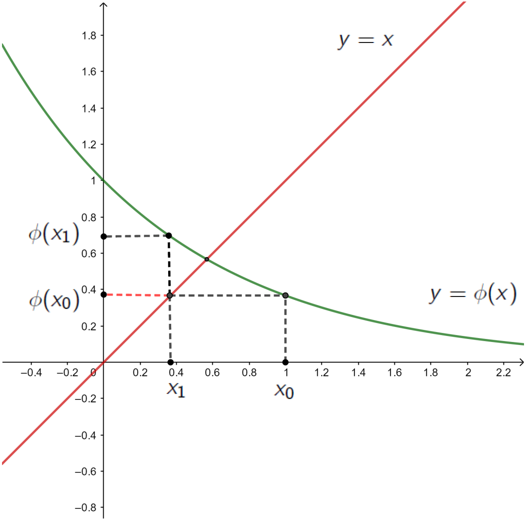
A partir de uma escolha de $x_0 \in [a, b]$ obtemos o valor de $\phi(x_0)$ utilizando o gráfico da função $\phi(x)$.



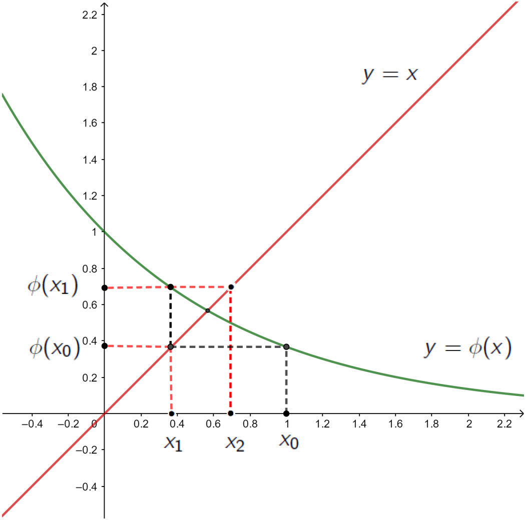
A partir de $\phi(x_0)$ utilizamos o gráfico da função $g(x) = x$ para obter o valor de $x_1 = \phi(x_0)$



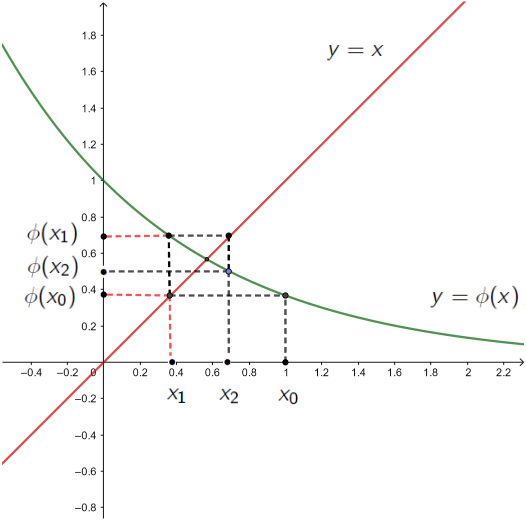
A partir de de x_1 obtemos o valor de $\phi(x_1)$ utilizando o gráfico da função $\phi(x)$.



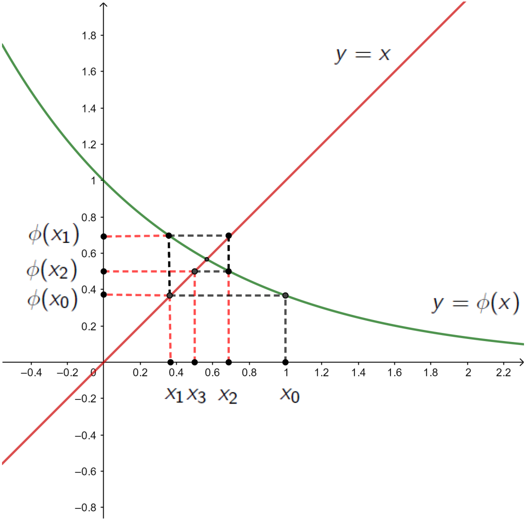
A partir de $\phi(x_1)$ utilizamos o gráfico da função $g(x) = x$ para obter o valor de $x_2 = \phi(x_1)$



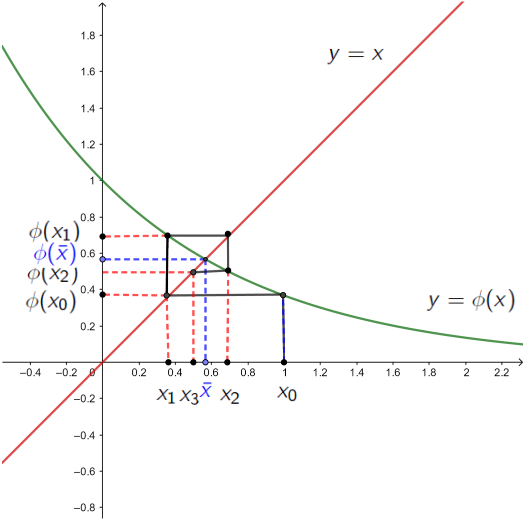
A partir de de x_2 obtemos o valor de $\phi(x_2)$ utilizando o gráfico da função $\phi(x)$.



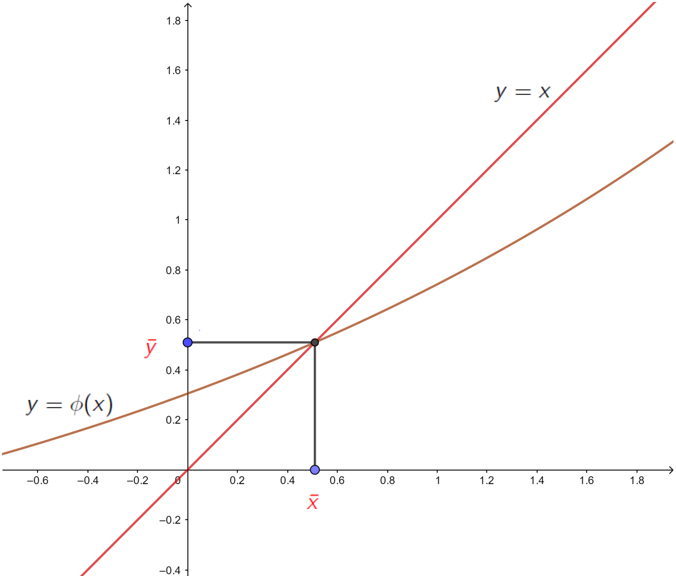
A partir de $\phi(x_2)$ utilizamos o gráfico da função $g(x) = x$ para obter o valor de $x_3 = \phi(x_2)$

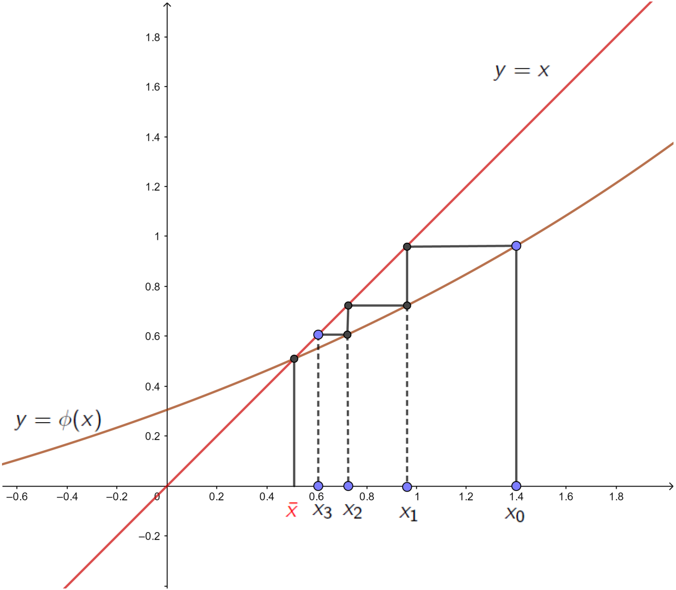


Assim a representação gráfica do algoritmo de Aproximações Sucessivas está associada à espiral que aparece na figura abaixo:

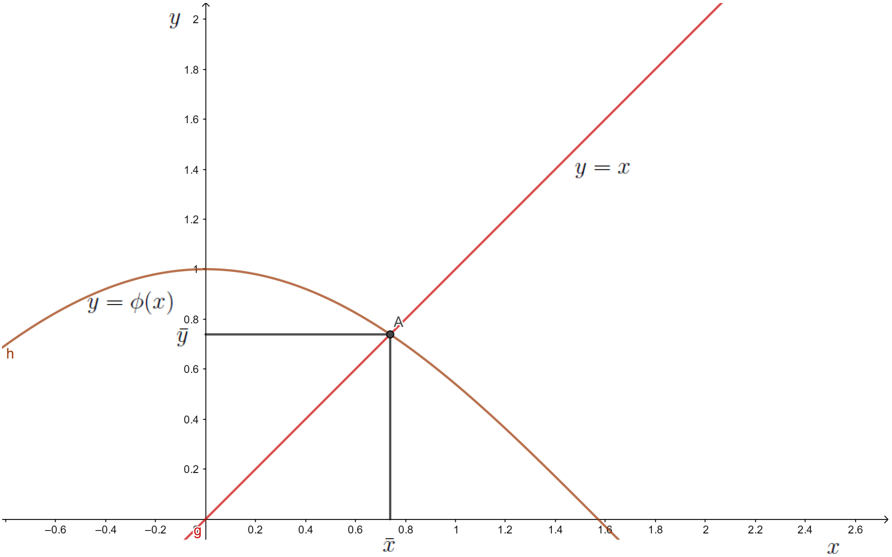


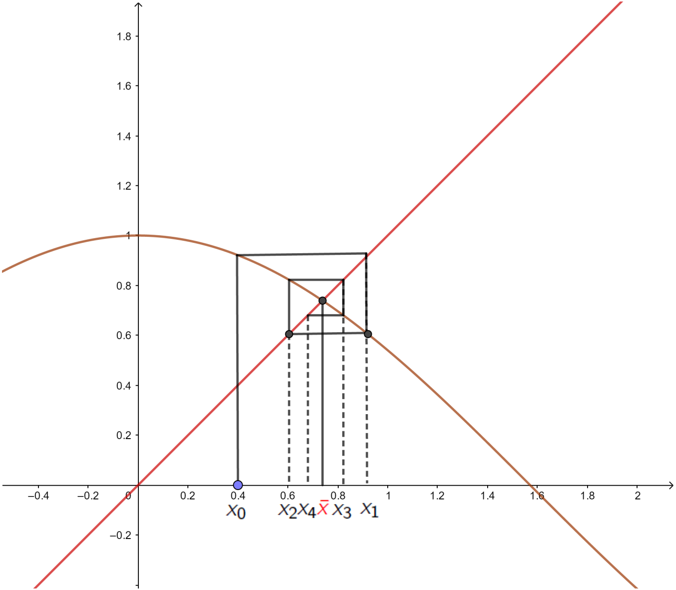
- $\phi(x)$ uma função convexa crescente



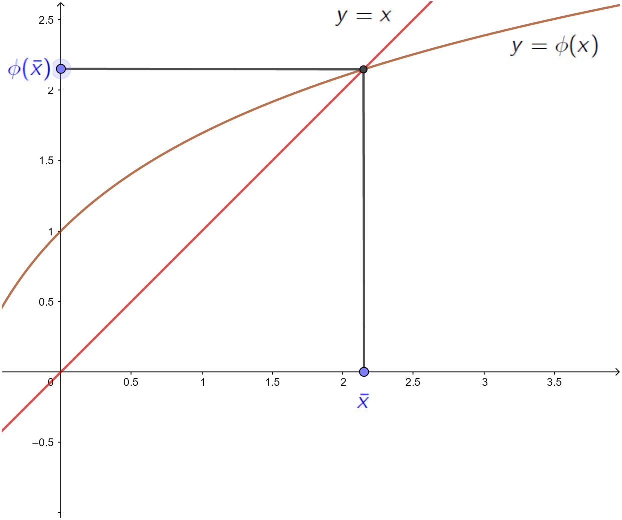

$y = x$
$y = \phi(x)$
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
$\bar{x}$
x_3
x_2
x_1
x_0

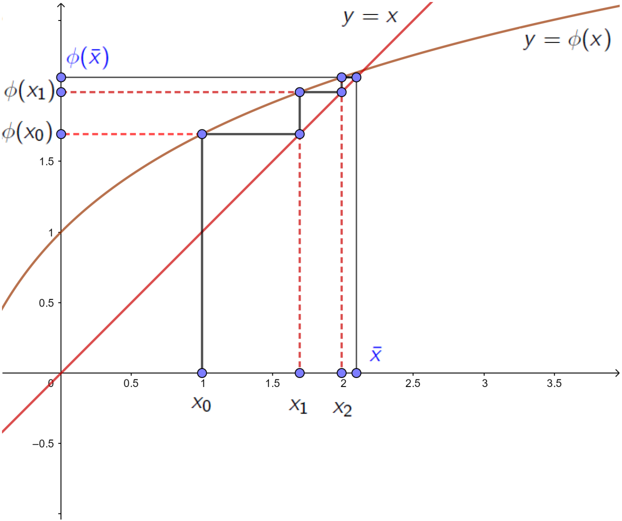
- $\phi(x)$ uma função concova decrescente



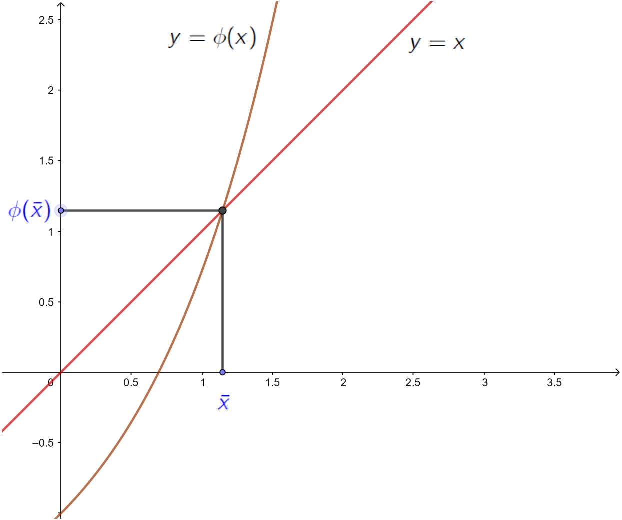

1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x_0
x_2
x_4
$\bar{x}$
x_3
x_1

- $\phi(x)$ uma função concava crescente

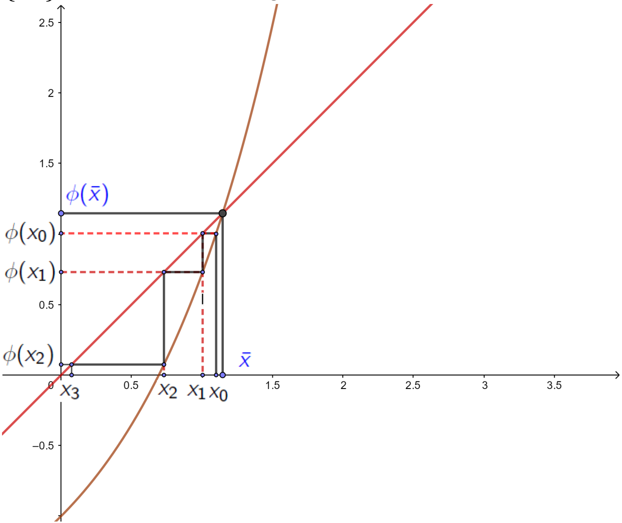



$y = x$
$y = \phi(x)$
$\phi(\bar{x})$
$\phi(x_1)$
$\phi(x_0)$
1.5
1
0.5
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
$\bar{x}$
x_0
x_1
x_2

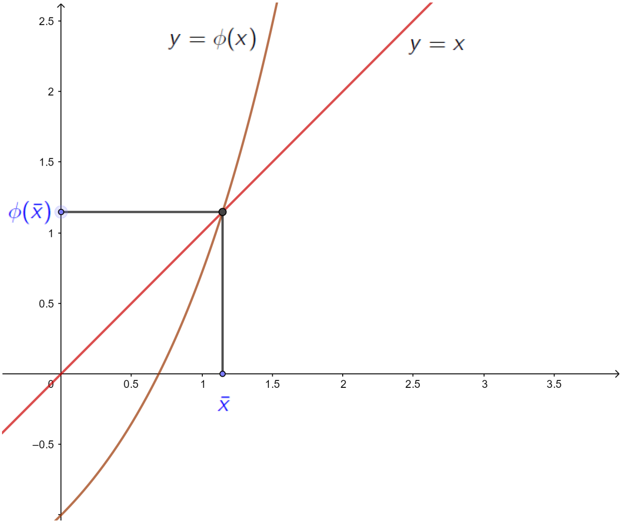
Observe o exemplo da figura abaixo

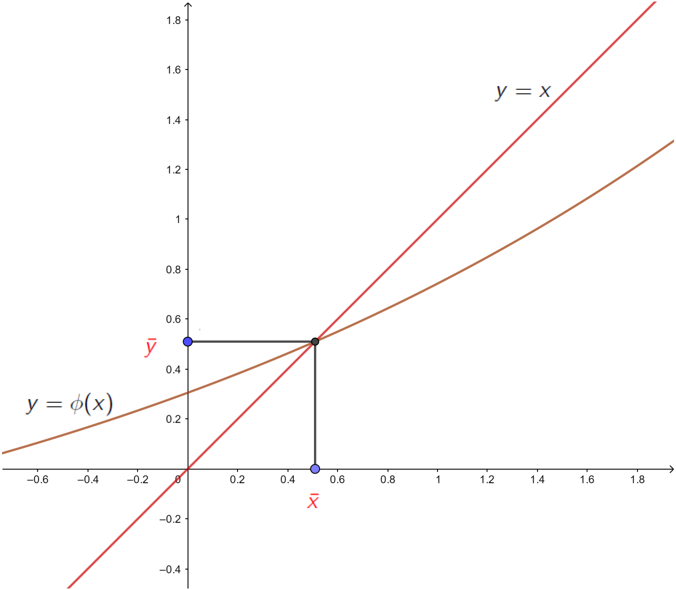


o procedimento das Aproximaçoes Sucessivas gera uma sequência $\{x_k\}$ que **não** converge para $\bar{x}$.



Observando os dois exemplos com funções convexas crescentes, um em que o método das Aproximações Sucessivas gera uma sequência que não se aproxima de $\bar{x}$ e o outro onde a sequência gerada se aproxima de $\bar{x}$


$y = \phi(x)$
$y = x$
$\phi(\bar{x})$
$\bar{x}$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


$y = x$
$y = \phi(x)$
$\bar{y}$
$\bar{x}$
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8

podemos perceber que a distinção entre estes exemplos está no fato de que no primeiro caso (não convergente), a magnitude da derivada da função $\phi(x)$ é maior que 1 e no segundo caso a magnitude da derivada da função $\phi(x)$ é menor que 1. De forma semelhante, se considerarmos exemplos de funções decrescentes com derivadas de magnitude maior que 1 (i.e. $\phi'(x) < -1$), as sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ não convergem para $\bar{x}$.

Baseado nestas observações procedemos com a seguinte análise sobre a convergência de sequências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ geradas pelo procedimento de Aproximações Sucessivas:

Para podermos fazer afirmações sobre a convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para $\bar{x}$, consideramos a diferença

$$\bar{x} - x_k$$

temos que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ e $x_k = \phi(x_{k-1})$ e portanto

$$\bar{x} - x_k = \phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1})$$

$$\bar{x} - x_k = \frac{\phi(\bar{x}) - \phi(x_{k-1})}{\bar{x} - x_{k-1}}(\bar{x} - x_{k-1})$$

$$\implies \bar{x} - x_k = \phi'(\eta)(\bar{x} - x_{k-1})$$

onde, a existência de um valor η no intervalo definido por $\bar{x}$ e x_{k-1} é assegurado pelo *Teorema do Valor Médio*.

Definindo K por:

$$K = \max_{\chi \in [a,b]} \mid \phi'(\chi) \mid$$

temos

$$\mid \bar{x} - x_k \mid \leq K \mid \bar{x} - x_{k-1} \mid$$

se esta desigualdade for satisfeita para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$\mid \bar{x} - x_{k-1} \mid \leq K \mid \bar{x} - x_{k-2} \mid$$

$$\Longrightarrow \mid \bar{x} - x_k \mid \leq K(\underbrace{\mid \bar{x} - x_{k-1} \mid}_{\leq K \mid \bar{x} - x_{k-2} \mid}) \leq K^2 \mid \bar{x} - x_{k-2} \mid$$

iterando obtemos:

$$\mid \bar{x} - x_k \mid \leq K^k \mid \bar{x} - x_0 \mid$$

Observando que $| \bar{x} - x_0 | \leq b - a$ pois $\bar{x}$ e x_0 são valores no intervalo $[a, b]$ nós temos que, se $x_k \in [a, b]\,; \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$| \bar{x} - x_k | \leq K^k \mid \bar{x} - x_0 \mid \leq K^k (b - a)$$