

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 1

As vibrações livres do sistema estrutural da figura foram monitoradas e constatou-se que, após cinco ciclos completos a partir da primeira resposta máxima em deslocamentos, a amplitude foi de 10% daquela. Nestas condições:

- proponha o oscilador de um grau de liberdade que representa o sistema da figura 4, calculando a rigidez da mola que lhe é equivalente;
- determine a taxa de amortecimento ζ , supondo comportamento viscoso linear;
- determine o coeficiente de amortecimento c .

Dados: $l = 2 \text{ m}$; $EI = 10^6 \text{ Nm}^2$; $k_m = 93750 \text{ Nm}^{-1}$ e $m = 4500 \text{ kg}$

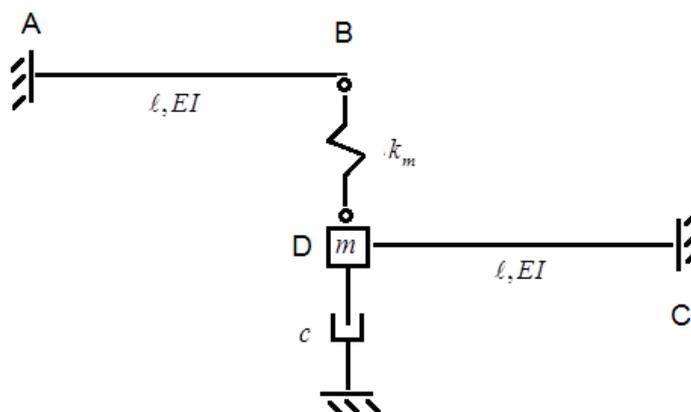


Figura 1

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 2

As barras da estrutura reticulada plana da figura 1 são prismáticas de produto de rigidez à flexão $EI = 800kNm^2$. Considerar os casos a seguir:

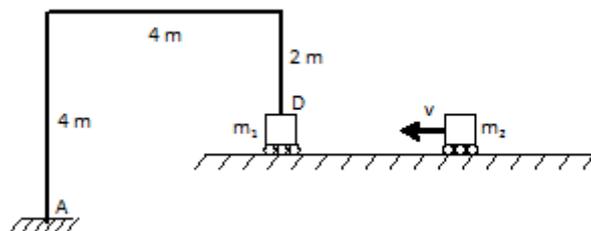


Figura 2

- A estrutura está submetida a um choque mecânico perfeitamente inelástico, sendo conhecidas as massas $m_1 = 800kg$ e $m_2 = 2400kg$, e a velocidade desta última antes do choque $v = 4ms^{-1}$. Determinar o máximo momento fletor na estrutura, decorrente do choque, desprezando o efeito do amortecimento.
- A estrutura foi reforçada com uma mola, conforme representado na figura 3. Por questões construtivas, esta foi instalada com uma inclinação $\alpha = 30^\circ$ com a direção horizontal. Determinar o coeficiente de rigidez da mola k de forma que o momento máximo obtido no item anterior seja reduzido à metade.

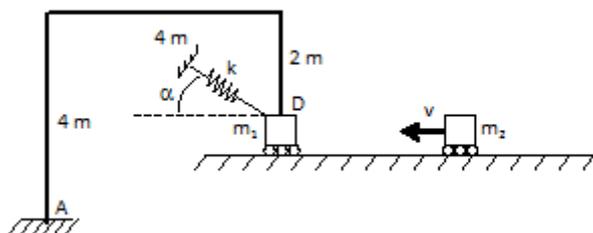


Figura 3

A solução da equação de vibrações livres não amortecidas é:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta), \quad \text{com} \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2 + (u_0)^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}\right)$$

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 3

A Figura 1a apresenta uma viga biapoitada de comprimento L associada a molas de rigidez k_m . Sobre este conjunto e no centro da viga existe uma massa m_1 inicialmente em repouso. A massa m_2 cai a partir do repouso sobre a massa m_1 . Note que a Figura 1b apresenta a solução elástica da flecha de uma viga biapoitada. Desconsidere qualquer forma de dissipação de energia.

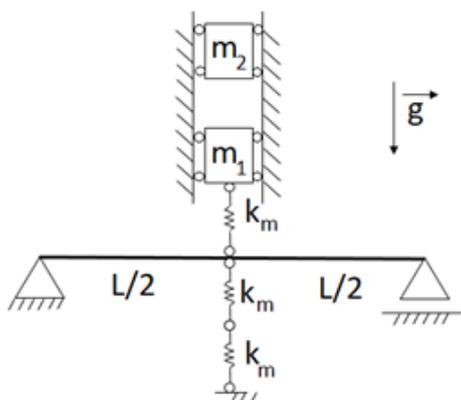


Figura 4

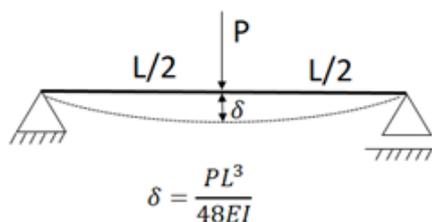


Figura 5

- Faça uma representação esquemática de um modelo de um grau de liberdade para o sistema após o choque mecânico, suposto perfeitamente inelástico. Escreva a equação de movimento para este modelo deixando-a como função dos parâmetros do enunciado, da aceleração gravitacional g e da rigidez equivalente relevante ao modelo k_{eq} .
- Obtenha uma expressão para a rigidez equivalente do modelo k_{eq} em função dos dados do enunciado.

A partir do item c, adote os seguintes valores numéricos:

$$m_1 = 500kg; L = 8m; EI = 50000Nm^2; k_m = 100000Nm^{-1}, g = 10ms^{-2}.$$

- A Figura 6 apresenta a série temporal de velocidade do sistema após o choque mecânico. As coordenadas dos pontos P_1, P_2 e P_3 são, respectivamente $(0; 0,5)$, $(0,814; 0,513)$ e $(1,597; 0,513)$. Determine o valor da massa m_2 e sua velocidade imediatamente antes do choque.
- Escreva a solução geral $u(t)$ da equação de movimento obtida no item a), bem como a série temporal $\dot{u}(t)$, enunciando as condições iniciais a serem utilizadas na resolução. Não é necessário o cálculo das constantes de integração da solução particular.
- Calcule o máximo deslocamento das massas após o choque mecânico. Dica: Este valor pode ser obtido mais facilmente por meio da análise da Figura 6.
- Calcule o maior momento fletor, em módulo, na viga biapoitada após o choque mecânico.

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

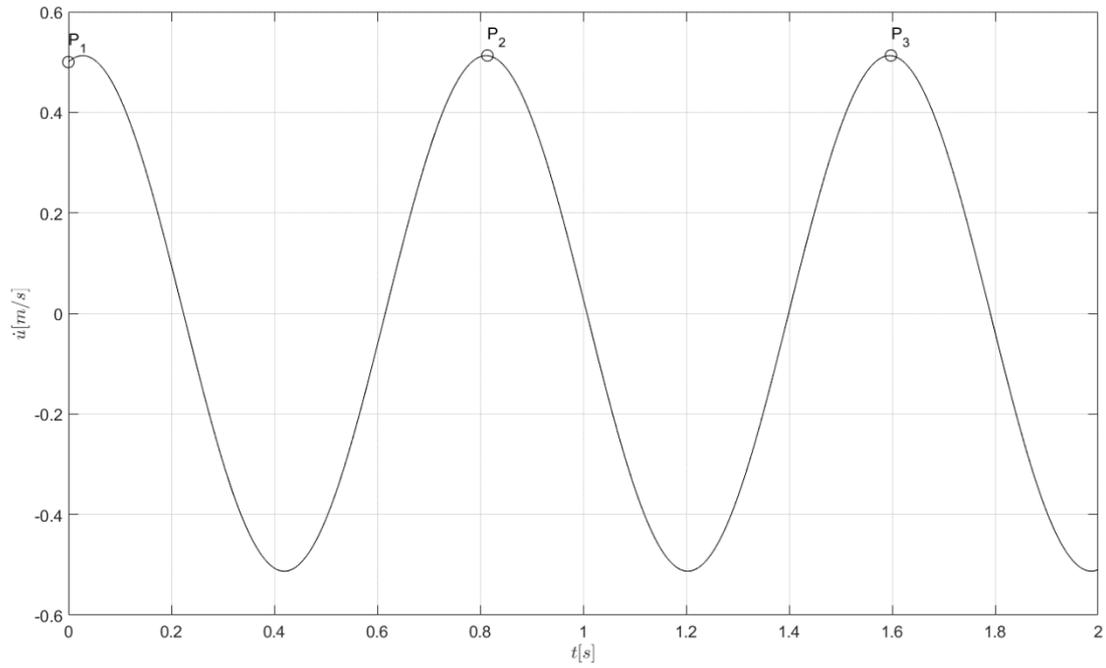


Figura 6

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 4

Você está desenvolvendo sua tese de doutorado sob orientação de um docente do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. A sua tese estuda uma nova concepção de turbina eólica, representada por uma massa $M = 2000kg$ suportada por duas barras imponderáveis inclinadas. Seu objeto de interesse é a movimento lateral $u(t)$ decorrente da interação da turbina com o vento incidente com velocidade U_∞ . Da interação da turbina com a corrente de vento, surge uma força lateral que pode ser modelada como $p(t) = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$. A figura 7 é uma representação esquemática do problema, onde cada barra foi modelada como um elemento visco-elástico.

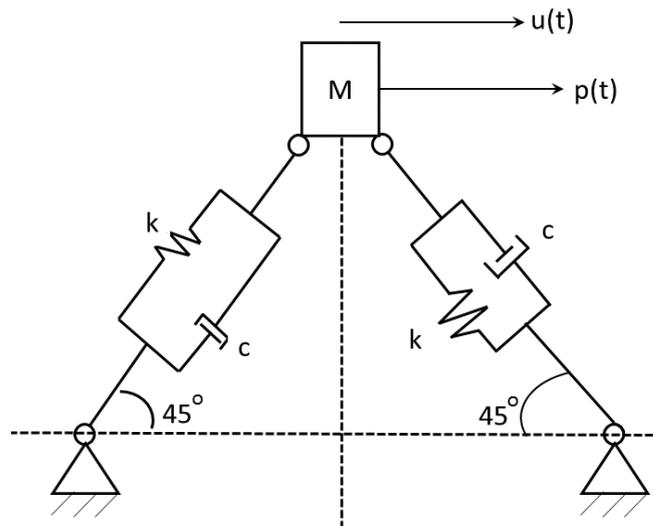


Figura 7

- a) Propor um modelo de um grau de liberdade para o estudo do movimento lateral $u(t)$. Explícite as expressões para a rigidez equivalente k_{eq} e para a constante de amortecimento equivalente c_{eq} como função dos parâmetros do enunciado.
- b) Suponha que tanto a amplitude da excitação p_0 quanto sua frequência $\bar{\omega}$ sejam funções da intensidade média de corrente de vento U_∞ . Admita-se que a frequência da excitação é dada por $\bar{\omega} = \alpha_1 U_\infty$, onde α_1 é uma constante a ser determinada. Foram feitos experimentos com três valores de corrente média de vento, a saber, $U_\infty = 10m/s$, $U_\infty = 2.5m/s$ e $U_\infty = 0.5m/s$. Nestes experimentos, foram monitoradas as séries temporais de força externa $p(t)[N]$ e de deslocamento $u(t)[m]$ em regime permanente. Estas séries temporais estão ilustradas na figura 8, juntamente com os respectivos valores máximos. Qual a correnteza de vento U_∞ que leva à condição de ressonância? Justificar sua resposta.

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

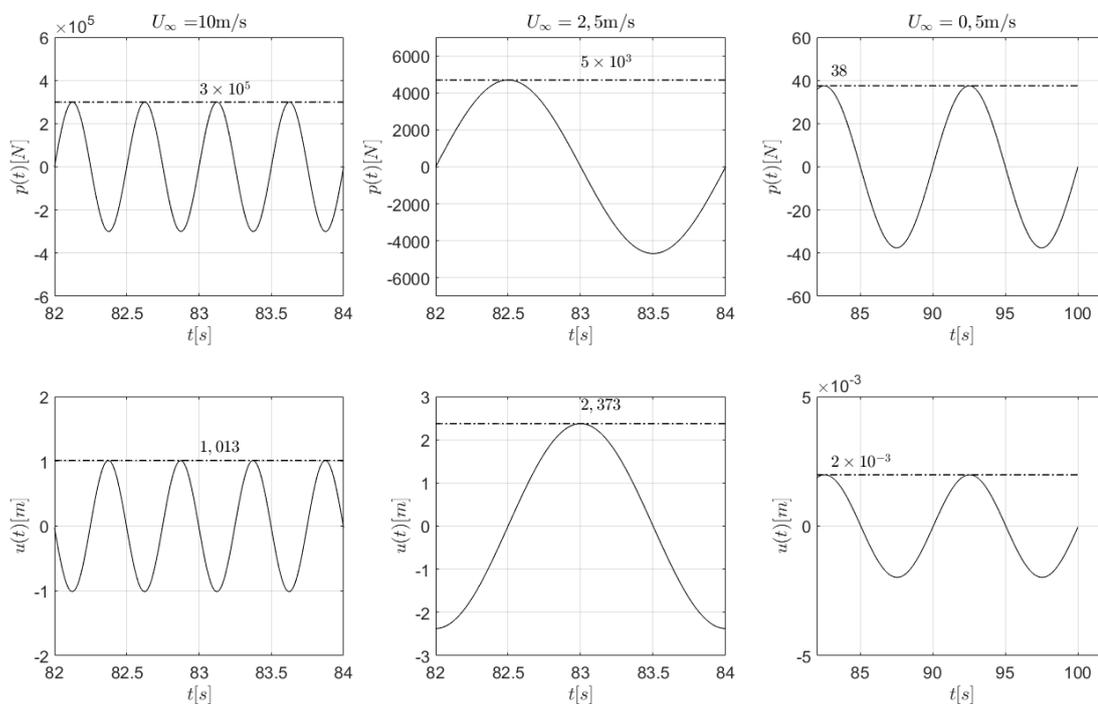


Figura 8

- c) Com base na figura 8, quais os valores da frequência natural não amortecida, da constante α_1 e da rigidez equivalente k_{eq} ?
- d) Ainda com base na figura 8, determine o fator de amplificação dinâmica D e a taxa de amortecimento do sistema ξ .
- e) A figura 9 apresenta a série temporal de deslocamento $u(t)$ da turbina em vibração livre. Sabe-se que as coordenadas do ponto P_1 indicado são $(2s; 0.073m)$. Determine as coordenadas do ponto P_2 . Justificar as simplificações utilizadas.

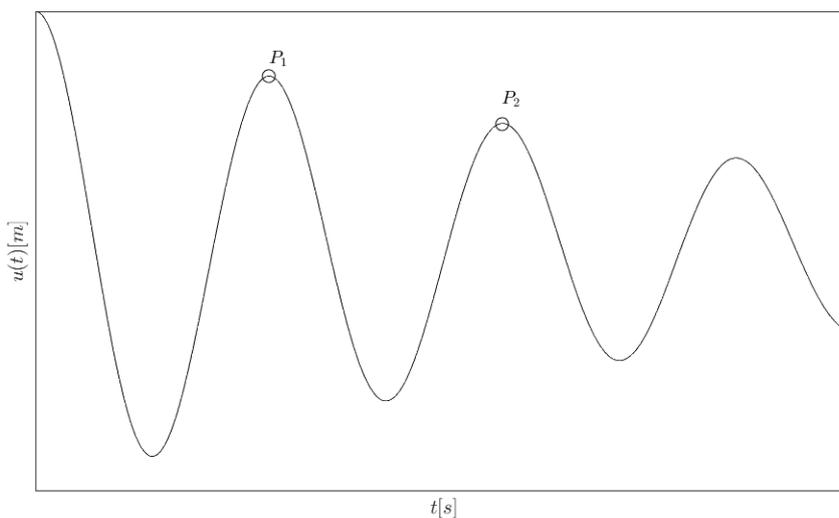


Figura 9

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Formulário:

- Características do sistema: $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Solução da equação diferencial $m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$
- Solução da equação diferencial $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_d t - \theta)$, com $\xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$
- Solução particular da equação diferencial:
 $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}\bar{\omega}t \rightarrow u_p(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$,
com $\bar{\rho} = D \frac{p_0}{k}$; $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ e $\bar{\theta} = \text{atan}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

Curiosidade: existem projetos conceituais de turbinas eólicas semelhantes a pipas. Esta concepção visa à exploração de energia eólica onde os ventos mais favoráveis estão em altitudes mais elevadas.

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 5

Determinar o diagrama de momentos fletores máximos, em regime permanente, das colunas da fundação aporticada de máquina representada na figura. A estrutura é modelada como um sistema de um grau de liberdade (deslocamento horizontal da viga de suporte da máquina, suposta **infinitamente rígida**). A massa das colunas é desprezível, a da viga rígida é $M = 1000kg$ e a da máquina é $m_{maq} = 500kg$. Sabe-se que, devido ao desbalanceamento das massas, a máquina aplica à estrutura um carregamento horizontal harmônico $p(t) = p_0 \text{sen} \bar{\omega} t$, de intensidade $p_0 = 81N$ e frequência $\bar{\omega} = 9 \text{rad} / s$. A constante do amortecedor viscoso linear instalado é $c = 1875Ns / m$, a altura das colunas é $h = 2m$ e seu produto de rigidez à flexão é $EI = 80000Nm^2$.

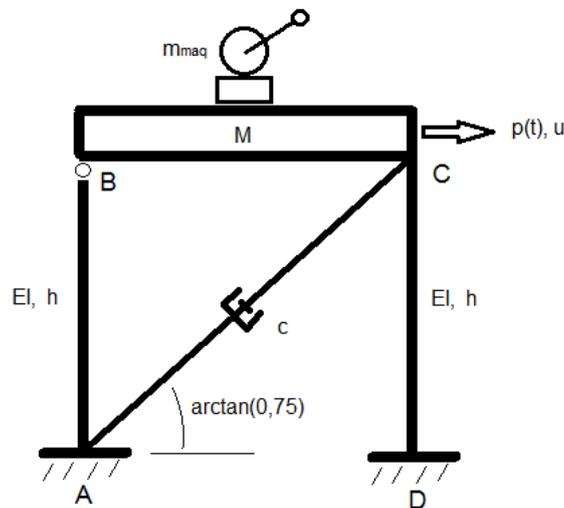


Figura 10

A solução em regime permanente da equação diferencial $\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{m} \text{sen} \bar{\omega} t$ é $u(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega} t - \bar{\theta})$, sendo $\bar{\rho} = D u_{est}$, com u_{est} indicando a resposta para um carregamento estático de intensidade p_0 .

Formulário:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}, \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \text{e} \quad \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right).$$

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 6

A viga AB da figura 11, suposta imponderável, dá suporte a uma máquina de massa $m = 1050 \text{ kg}$ que, quando em funcionamento, aplica-lhe uma força na direção transversal $p = p_0 \text{sen} \bar{\omega} t$, com $p_0 = 262,50 \text{ kN}$. Sabe-se que, para a condição de **ressonância**, o maior momento fletor na viga, **em regime permanente**, vale $M_1 = 10,50 \text{ kNm}$. Considere a modelagem do sistema com um único grau de liberdade, a saber, o deslocamento transversal $u(t)$ da massa.

Dados: $EI = 560 \text{ kNm}^2$ e $a = 2 \text{ m}$.

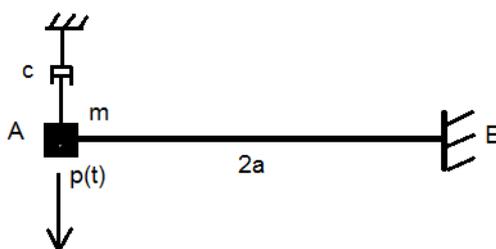


Figura 11

- a) Determinar o coeficiente de amortecimento subcrítico c do amortecedor instalado, nestas condições.
- b) O sistema estrutural foi alterado, conforme se indica na figura 2, com o coeficiente de rigidez da mola valendo $k = 38182 \text{ N/m}$. A viga CED é prismática, com $EI = 560 \text{ kNm}^2$. Determinar, nessas novas condições, o diagrama dos máximos momentos fletores em toda a estrutura, **em regime permanente**, para o **mesmo carregamento anteriormente aplicado**.

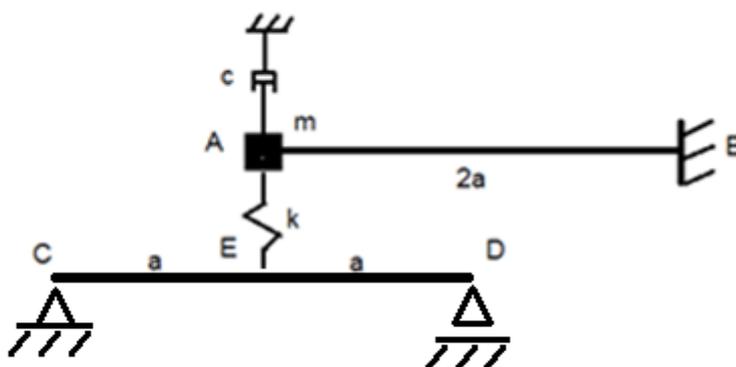


Figura 12

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Formulário:

$$u(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta}); \bar{\rho} = D \frac{p_0}{k^*}; D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}; \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega^*}; \xi^* = \frac{c}{2m\omega^*}; \omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m}}$$

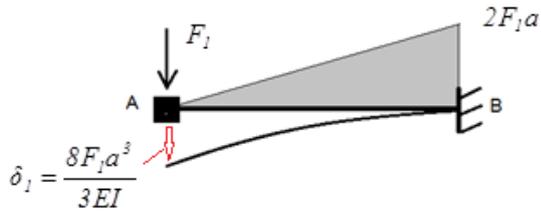


Figura 13

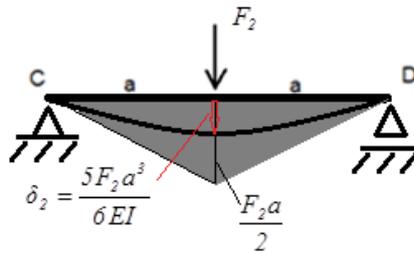


Figura 14

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Exercício 7

Considere a estrutura isostática submetida à excitação horizontal de suporte representada na figura. Nos cálculos, considere um modelo em que o único grau de liberdade é o deslocamento horizontal da massa m .

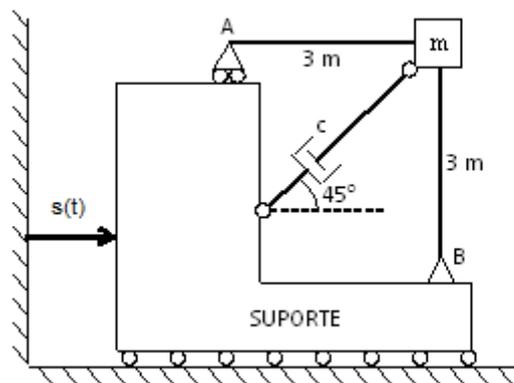


Figura 1

São conhecidos: $EI = 2,7 \times 10^7 \text{ Nm}^2$; $c = 20000 \text{ Ns/m}$; $s(t) = 0,002\text{sen}(45t)$; $m = 1200 \text{ kg}$.

Sabe-se que o sistema se encontra em regime permanente.

- Utilizar o teorema dos esforços virtuais para determinar o coeficiente de rigidez equivalente da estrutura.
- Por motivos construtivos, o deslocamento horizontal máximo da massa m **em relação ao suporte** não pode superar 5 mm. Verificar se tal condição é violada.
- Sabe-se que a massa m representa um telescópio. Para que sua precisão não seja prejudicada, o deslocamento máximo **em relação a um referencial inercial** não pode superar 10 mm. Verificar se tal condição é violada.

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad TR = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad u_e = \beta^2 x_0$$

Para funções $f(x)$ e $g(x)$ lineares: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{(b-a)}{6} [f_a(2g_a + g_b) + f_b(g_a + 2g_b)]$

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

Respostas

Exercício 1

$$k_{eq} = 450000 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\xi = 7,3\%$$

$$c = 6579 \text{ kg/s}$$

Exercício 2

$$M_{\max} = 61970 \text{ Nm}$$

$$k_m = 133333 \text{ N/m}$$

Exercício 3

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} + k_{eq}u = (m_1 + m_2)g$$

$$k_{eq} = \frac{k_m \left(\frac{48EI}{L^3} + \frac{k_m}{2} \right)}{\frac{48EI}{L^3} + \frac{3}{2}k_m}$$

$$m_2 = 49 \text{ kg}, v = 5,6 \text{ m/s}$$

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) + \frac{m_1 + m_2}{k_{eq}}g, u(0) = 0,14 \text{ m}, \dot{u}(0) = 0,5 \text{ m/s}$$

$$u_{\max} = 0,22 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 1333,33 \text{ Nm}$$

Exercício 4

$$k_{eq} = k; c_{eq} = c$$

$$U_{\infty} = 2,5 \text{ m/s}$$

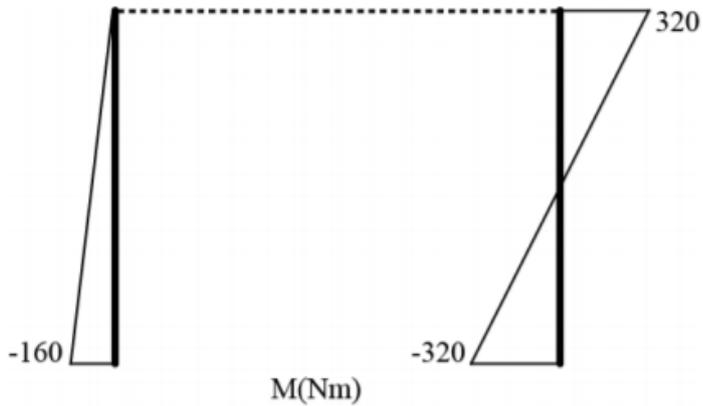
$$\omega = \pi \text{ rad/s}, \alpha_1 = 1,26 \text{ rad/m}, k_{eq} = 19739 \text{ N/m}$$

$$D = 9,4, \xi = 5,3\%$$

$$P_2 = (4 \text{ s}; 0,052 \text{ m})$$

PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II
Lista 2 – Dinâmica das estruturas

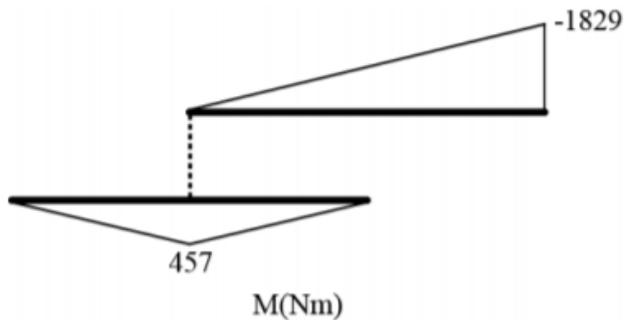
Exercício 5



Exercício 6

$$c = 528 \text{ kg/s}$$

Observação: Diagrama sem M_{est} .



Exercício 7

$$k_{eq} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$u_{rel,max} = 4,7 \text{ mm} \text{ (Condição não violada)}$$

$$u_{tot,max} = 3,1 \text{ mm} \text{ (Condição não violada)}$$