

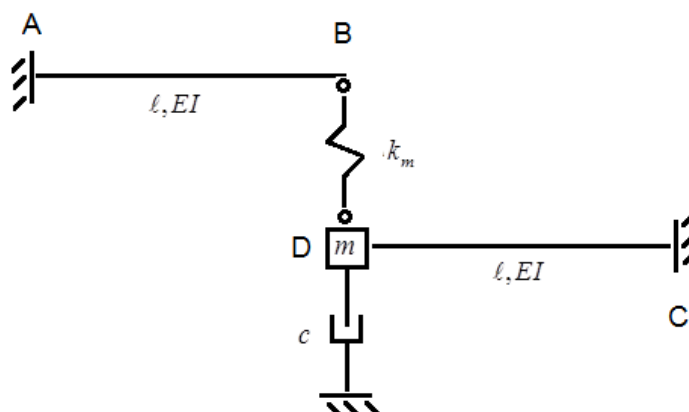
**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 1**

As vibrações livres do sistema estrutural da figura foram monitoradas e constatou-se que, após cinco ciclos completos a partir da primeira resposta máxima em deslocamentos, a amplitude foi de 10% daquela. Nestas condições:

- proponha o oscilador de um grau de liberdade que representa o sistema da figura 4, calculando a rigidez da mola que lhe é equivalente;
- determine a taxa de amortecimento  $\zeta$ , supondo comportamento viscoso linear;
- determine o coeficiente de amortecimento  $c$ .

**Dados:**  $l = 2 \text{ m}$ ;  $EI = 10^6 \text{ Nm}^2$ ;  $k_m = 93750 \text{ Nm}^{-1}$  e  $m = 4500 \text{ kg}$

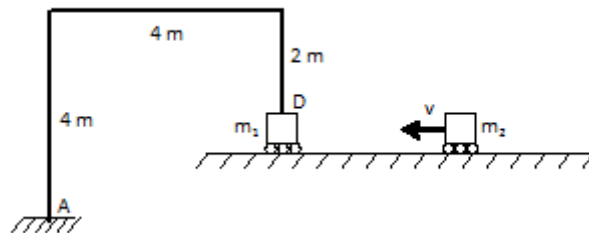


**Figura 1**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

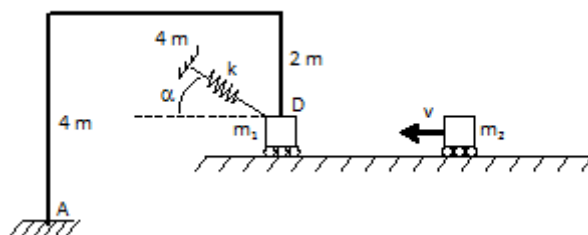
**Exercício 2**

As barras da estrutura reticulada plana da figura 1 são prismáticas de produto de rigidez à flexão  $EI = 800kNm^2$ . Considerar os casos a seguir:



**Figura 2**

- A estrutura está submetida a um choque mecânico perfeitamente inelástico, sendo conhecidas as massas  $m_1 = 800kg$  e  $m_2 = 2400kg$ , e a velocidade desta última antes do choque  $v = 4ms^{-1}$ . Determinar o máximo momento fletor na estrutura, decorrente do choque, desprezando o efeito do amortecimento.
- A estrutura foi reforçada com uma mola, conforme representado na figura 3. Por questões construtivas, esta foi instalada com uma inclinação  $\alpha = 30^\circ$  com a direção horizontal. Determinar o coeficiente de rigidez da mola  $k$  de forma que o momento máximo obtido no item anterior seja reduzido à metade.



**Figura 3**

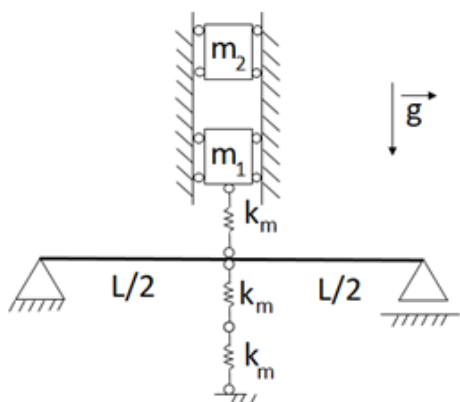
A solução da equação de vibrações livres não amortecidas é:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta), \quad \text{com} \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2 + (u_0)^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0}\right)$$

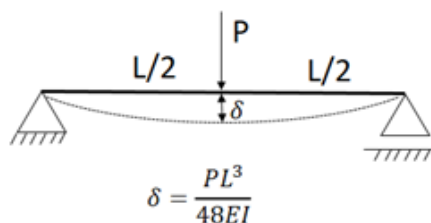
**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 3**

A Figura 1a apresenta uma viga biapoitada de comprimento  $L$  associada a molas de rigidez  $k_m$ . Sobre este conjunto e no centro da viga existe uma massa  $m_1$  inicialmente em repouso. A massa  $m_2$  cai a partir do repouso sobre a massa  $m_1$ . Note que a Figura 1b apresenta a solução elástica da flecha de uma viga biapoitada. Desconsidere qualquer forma de dissipação de energia.



**Figura 4**



**Figura 5**

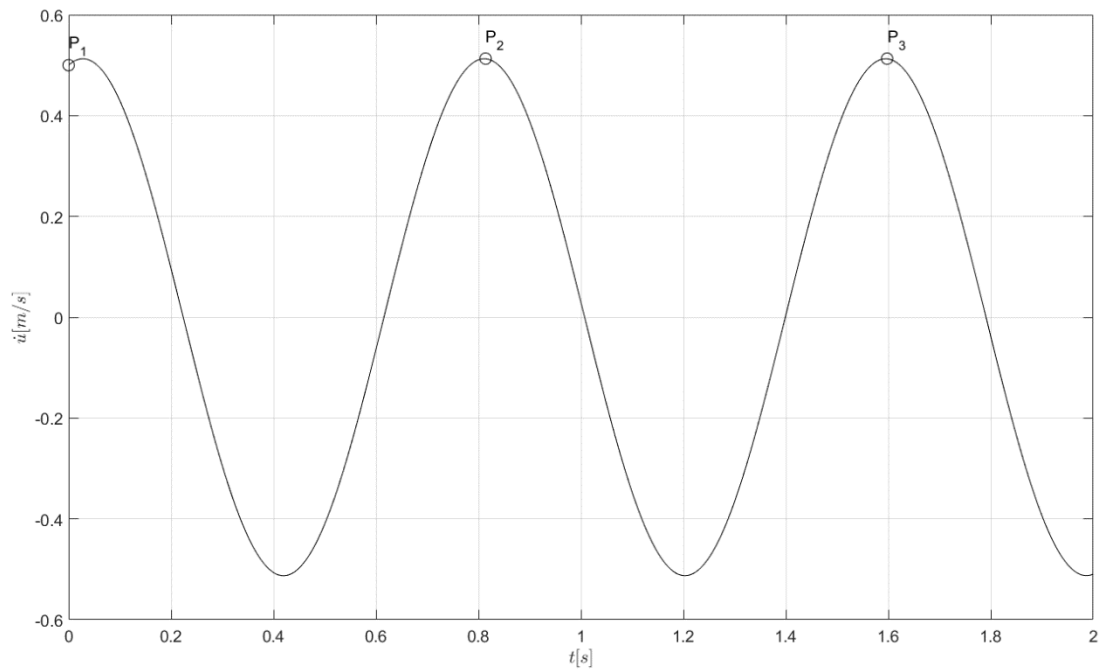
- Faça uma representação esquemática de um modelo de um grau de liberdade para o sistema após o choque mecânico, suposto perfeitamente inelástico. Escreva a equação de movimento para este modelo deixando-a como função dos parâmetros do enunciado, da aceleração gravitacional  $g$  e da rigidez equivalente relevante ao modelo  $k_{eq}$ .
- Obtenha uma expressão para a rigidez equivalente do modelo  $k_{eq}$  em função dos dados do enunciado.

**A partir do item c, adote os seguintes valores numéricos:**

$$m_1 = 500kg; L = 8m; EI = 50000Nm^2; k_m = 100000Nm^{-1}, g = 10ms^{-2}.$$

- A Figura 6 apresenta a série temporal de velocidade do sistema após o choque mecânico. As coordenadas dos pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são, respectivamente  $(0; 0,5)$ ,  $(0,814; 0,513)$  e  $(1,597; 0,513)$ . Determine o valor da massa  $m_2$  e sua velocidade imediatamente antes do choque.
- Escreva a solução geral  $u(t)$  da equação de movimento obtida no item a), bem como a série temporal  $\dot{u}(t)$ , enunciando as condições iniciais a serem utilizadas na resolução. Não é necessário o cálculo das constantes de integração da solução particular.
- Calcule o máximo deslocamento das massas após o choque mecânico. Dica: Este valor pode ser obtido mais facilmente por meio da análise da Figura 6.
- Calcule o maior momento fletor, em módulo, na viga biapoitada após o choque mecânico.

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

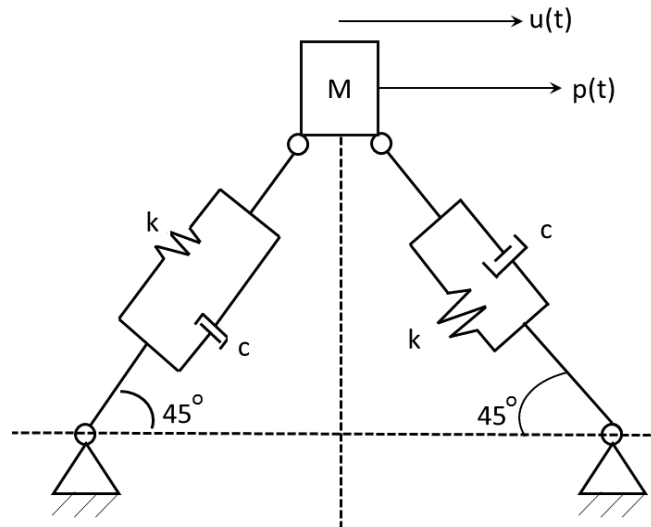


**Figura 6**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 4**

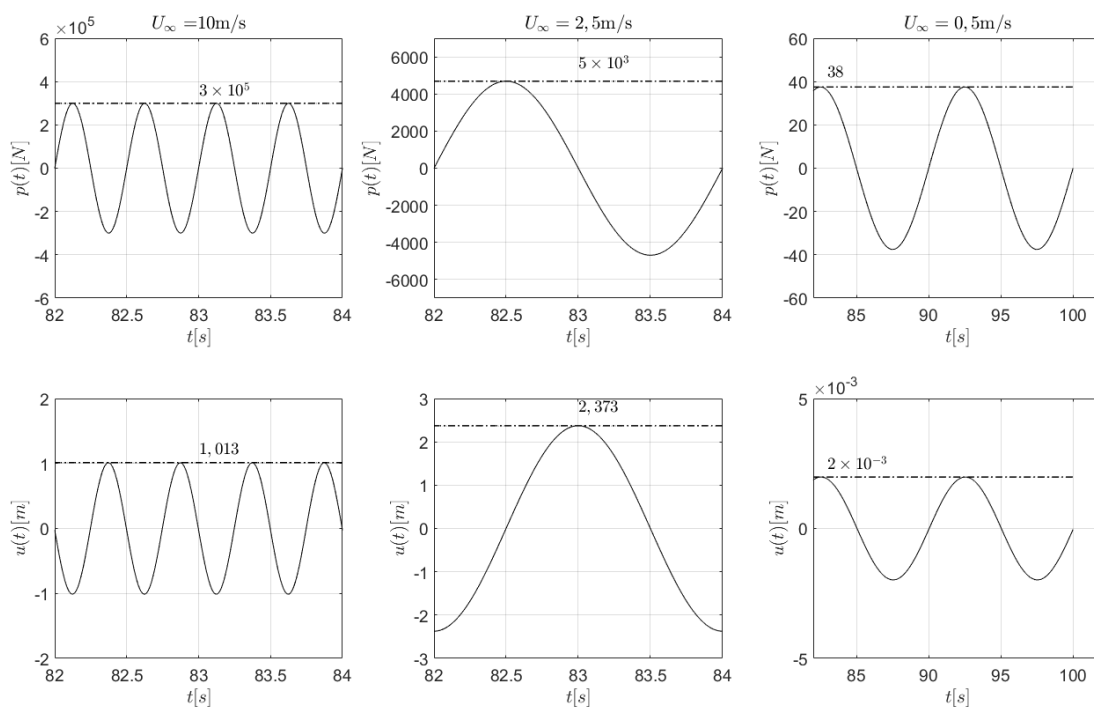
Você está desenvolvendo sua tese de doutorado sob orientação de um docente do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. A sua tese estuda uma nova concepção de turbina eólica, representada por uma massa  $M = 2000kg$  suportada por duas barras imponderáveis inclinadas. Seu objeto de interesse é a movimento lateral  $u(t)$  decorrente da interação da turbina com o vento incidente com velocidade  $U_\infty$ . Da interação da turbina com a corrente de vento, surge uma força lateral que pode ser modelada como  $p(t) = p_0 \text{sen}(\bar{\omega}t)$ . A figura 7 é uma representação esquemática do problema, onde cada barra foi modelada como um elemento visco-elástico.



**Figura 7**

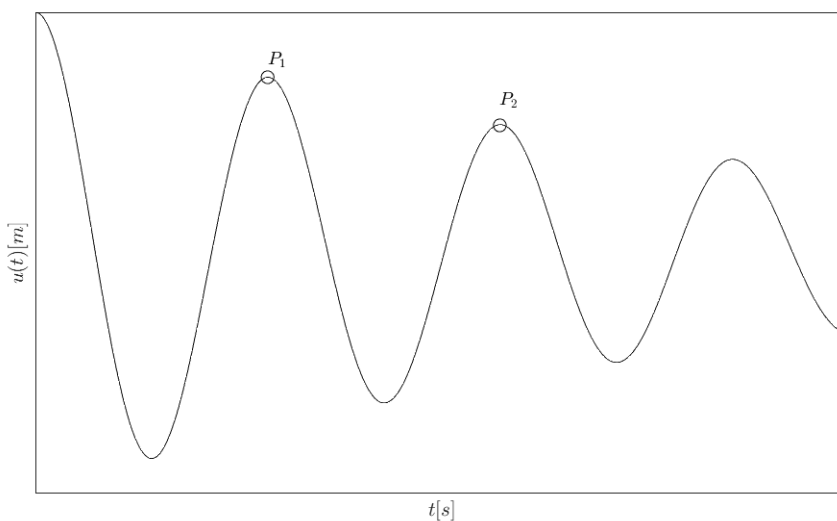
- Propor um modelo de um grau de liberdade para o estudo do movimento lateral  $u(t)$ . Explícite as expressões para a rigidez equivalente  $k_{eq}$  e para a constante de amortecimento equivalente  $c_{eq}$  como função dos parâmetros do enunciado.
- Suponha que tanto a amplitude da excitação  $p_0$  quanto sua frequência  $\bar{\omega}$  sejam funções da intensidade média de corrente de vento  $U_\infty$ . Admite-se que a frequência da excitação é dada por  $\bar{\omega} = \alpha_1 U_\infty$ , onde  $\alpha_1$  é uma constante a ser determinada. Foram feitos experimentos com três valores de corrente média de vento, a saber,  $U_\infty = 10m/s$ ,  $U_\infty = 2.5m/s$  e  $U_\infty = 0.5m/s$ . Nestes experimentos, foram monitoradas as séries temporais de força externa  $p(t)[N]$  e de deslocamento  $u(t)[m]$  em regime permanente. Estas séries temporais estão ilustradas na figura 8, juntamente com os respectivos valores máximos. Qual a correnteza de vento  $U_\infty$  que leva à condição de ressonância? Justificar sua resposta.

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**



**Figura 8**

- c) Com base na figura 8, quais os valores da frequência natural não amortecida, da constante  $\alpha_1$  e da rigidez equivalente  $k_{eq}$ ?
- d) Ainda com base na figura 8, determine o fator de amplificação dinâmica D e a taxa de amortecimento do sistema  $\xi$ .
- e) A figura 9 apresenta a série temporal de deslocamento  $u(t)$  da turbina em vibração livre. Sabe-se que as coordenadas do ponto  $P_1$  indicado são  $(2s; 0.073m)$ . Determine as coordenadas do ponto  $P_2$ . Justificar as simplificações utilizadas.



**Figura 9**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Formulário:**

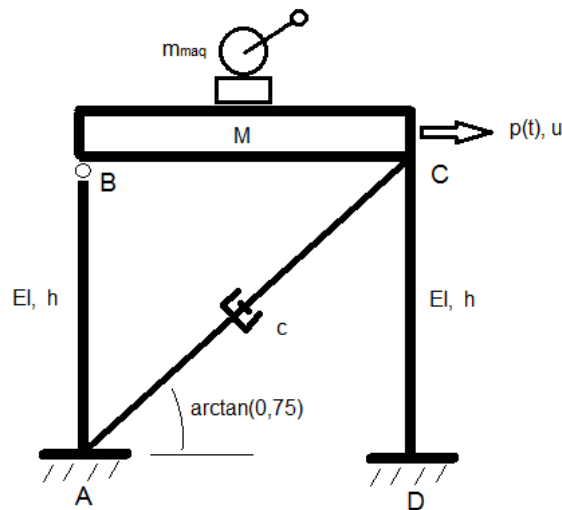
- Características do sistema:  $\xi = \frac{c}{2m\omega}$   $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .
- Solução da equação diferencial  $m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$
- Solução da equação diferencial  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_d t - \theta)$ , com  $\xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$
- Solução particular da equação diferencial:  
 $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}\bar{\omega}t \rightarrow u_p(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta})$ ,  
com  $\bar{\rho} = D \frac{p_0}{k}$ ;  $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$  e  $\bar{\theta} = \text{atan}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

**Curiosidade:** existem projetos conceituais de turbinas eólicas semelhantes a pipas. Esta concepção visa à exploração de energia eólica onde os ventos mais favoráveis estão em altitudes mais elevadas.

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 5**

Determinar o diagrama de momentos fletores máximos, em regime permanente, das colunas da fundação aporticada de máquina representada na figura. A estrutura é modelada como um sistema de um grau de liberdade (deslocamento horizontal da viga de suporte da máquina, suposta **infinitamente rígida**). A massa das colunas é desprezível, a da viga rígida é  $M = 1000kg$  e a da máquina é  $m_{maq} = 500kg$ . Sabe-se que, devido ao desbalanceamento das massas, a máquina aplica à estrutura um carregamento horizontal harmônico  $p(t) = p_0 \text{sen} \bar{\omega} t$ , de intensidade  $p_0 = 81N$  e frequência  $\bar{\omega} = 9 \text{rad} / s$ . A constante do amortecedor viscoso linear instalado é  $c = 1875Ns / m$ , a altura das colunas é  $h = 2m$  e seu produto de rigidez à flexão é  $EI = 80000Nm^2$ .



**Figura 10**

A solução em regime permanente da equação diferencial  $\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{m} \text{sen} \bar{\omega} t$  é  $u(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega} t - \bar{\theta})$ , sendo  $\bar{\rho} = D u_{est}$ , com  $u_{est}$  indicando a resposta para um carregamento estático de intensidade  $p_0$ .

**Formulário:**

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}, \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \text{e} \quad \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right).$$

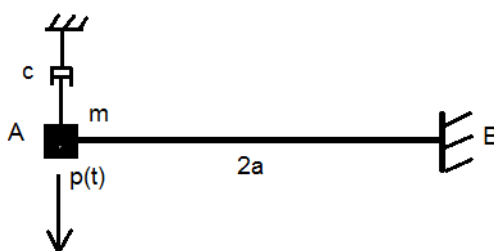


**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 6**

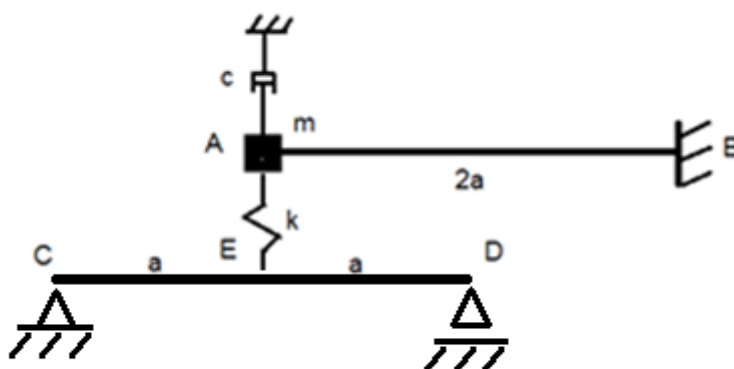
A viga AB da figura 11, suposta imponderável, dá suporte a uma máquina de massa  $m = 1050 \text{ kg}$  que, quando em funcionamento, aplica-lhe uma força na direção transversal  $p = p_0 \text{sen} \bar{\omega} t$ , com  $p_0 = 262,50 \text{ kN}$ . Sabe-se que, para a condição de **ressonância**, o maior momento fletor na viga, **em regime permanente**, vale  $M_1 = 10,50 \text{ kNm}$ . Considere a modelagem do sistema com um único grau de liberdade, a saber, o deslocamento transversal  $u(t)$  da massa.

**Dados:**  $EI = 560 \text{ kNm}^2$  e  $a = 2 \text{ m}$ .



**Figura 11**

- a) Determinar o coeficiente de amortecimento subcrítico  $c$  do amortecedor instalado, nestas condições.
- b) O sistema estrutural foi alterado, conforme se indica na figura 2, com o coeficiente de rigidez da mola valendo  $k = 38182 \text{ N/m}$ . A viga CED é prismática, com  $EI = 560 \text{ kNm}^2$ . Determinar, nessas novas condições, o diagrama dos máximos momentos fletores em toda a estrutura, **em regime permanente**, para o **mesmo carregamento anteriormente aplicado**.

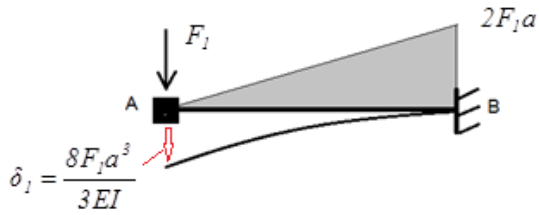


**Figura 12**

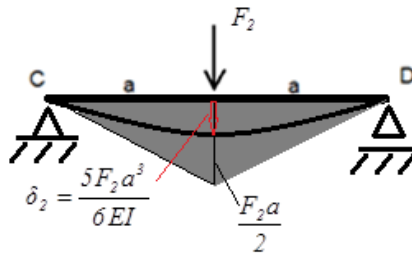
**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Formulário:**

$$u(t) = \bar{\rho} \text{sen}(\bar{\omega}t - \bar{\theta}); \bar{\rho} = D \frac{p_0}{k^*}; D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}; \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega^*}; \xi^* = \frac{c}{2m\omega^*}; \omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m}}$$



**Figura 13**



**Figura 14**

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Exercício 7**

Considere a estrutura isostática submetida à excitação horizontal de suporte representada na figura. Nos cálculos, considere um modelo em que o único grau de liberdade é o deslocamento horizontal da massa  $m$ .

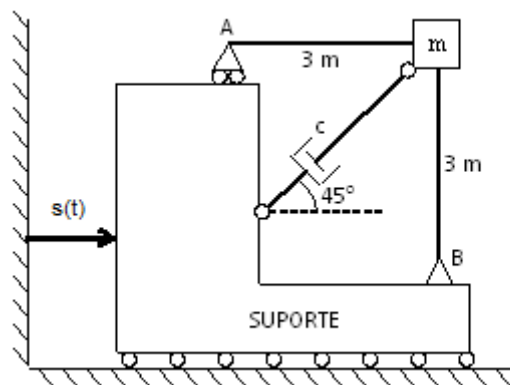


Figura 1

São conhecidos:  $EI = 2,7 \times 10^7 \text{ Nm}^2$ ;  $c = 20000 \text{ Ns/m}$ ;  $s(t) = 0,002\text{sen}(45t)$ ;  $m = 1200 \text{ kg}$ .

Sabe-se que o sistema se encontra em regime permanente.

- Utilizar o teorema dos esforços virtuais para determinar o coeficiente de rigidez equivalente da estrutura.
- Por motivos construtivos, o deslocamento horizontal máximo da massa  $m$  **em relação ao suporte** não pode superar 5 mm. Verificar se tal condição é violada.
- Sabe-se que a massa  $m$  representa um telescópio. Para que sua precisão não seja prejudicada, o deslocamento máximo **em relação a um referencial inercial** não pode superar 10 mm. Verificar se tal condição é violada.

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad TR = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad u_e = \beta^2 x_0$$

Para funções  $f(x)$  e  $g(x)$  lineares:  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{(b-a)}{6} [f_a(2g_a + g_b) + f_b(g_a + 2g_b)]$

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

**Respostas**

**Exercício 1**

$$k_{eq} = 450000 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\xi = 7,3\%$$

$$c = 6579 \text{ kg/s}$$

**Exercício 2**

$$M_{\max} = 61970 \text{ Nm}$$

$$k_m = 133333 \text{ N/m}$$

**Exercício 3**

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} + k_{eq}u = (m_1 + m_2)g$$

$$k_{eq} = \frac{k_m \left( \frac{48EI}{L^3} + \frac{k_m}{2} \right)}{\frac{48EI}{L^3} + \frac{3}{2}k_m}$$

$$m_2 = 49 \text{ kg}, v = 5,6 \text{ m/s}$$

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) + \frac{m_1 + m_2}{k_{eq}}g, u(0) = 0,14 \text{ m}, \dot{u}(0) = 0,5 \text{ m/s}$$

$$u_{\max} = 0,22 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 1333,33 \text{ Nm}$$

**Exercício 4**

$$k_{eq} = k; c_{eq} = c$$

$$U_{\infty} = 2,5 \text{ m/s}$$

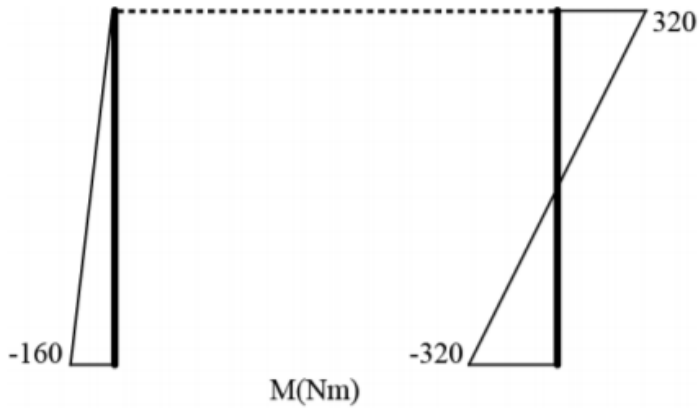
$$\omega = \pi \text{ rad/s}, \alpha_1 = 1,26 \text{ rad/m}, k_{eq} = 19739 \text{ N/m}$$

$$D = 9,4, \xi = 5,3\%$$

$$P_2 = (4 \text{ s}; 0,052 \text{ m})$$

**PEF 3401 – Mecânica das Estruturas II**  
**Lista 2 – Dinâmica das estruturas**

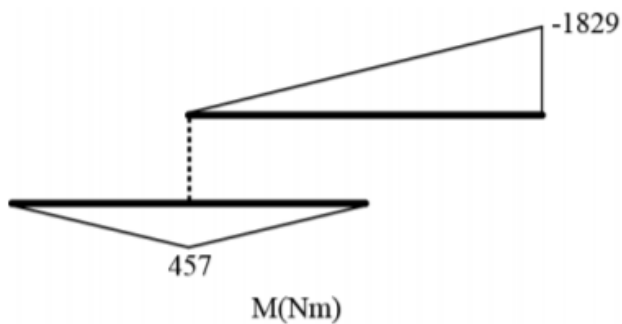
**Exercício 5**



**Exercício 6**

$$c = 528 \text{ kg/s}$$

**Observação:** Diagrama sem  $M_{est}$ .



**Exercício 7**

$$k_{eq} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$u_{rel,max} = 4,7 \text{ mm} \text{ (Condição não violada)}$$

$$u_{tot,max} = 3,1 \text{ mm} \text{ (Condição não violada)}$$