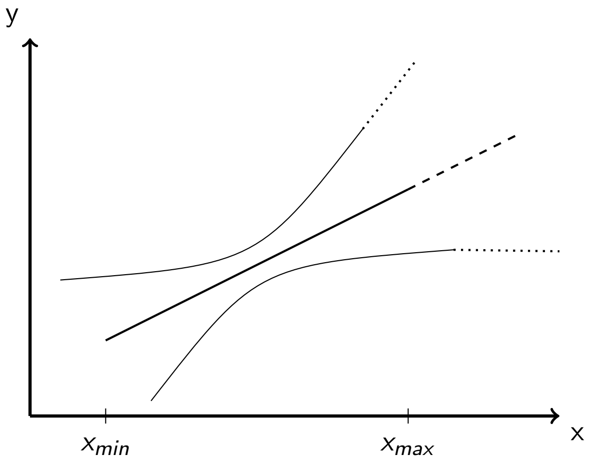
Teste da falta de ajustamento

Prof^a Silvia Nagib Elian
Sala 215 - Bloco A

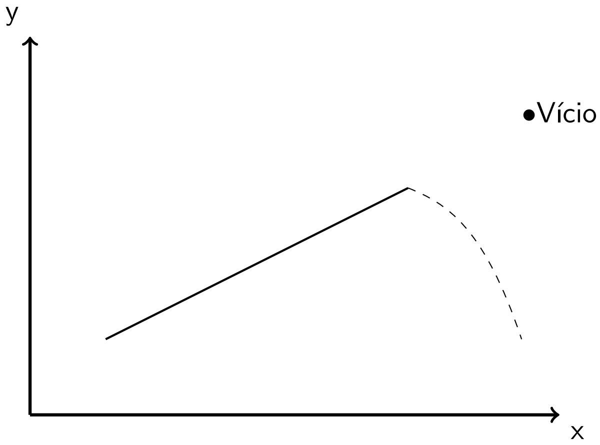
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Agenda

Visualização



Visualização



Valores

		média	SS	GL
x_1	$y_{11}\ y_{12}\ \cdots\ y_{1n_1}$	$\bar{y}_1$	$\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\bar{y}_1)^2$	n_1-1
x_2	$y_{21}\ y_{22}\ \cdots\ y_{2n_2}$	$\bar{y}_2$	$\sum_{j=1}^{n_2}(y_{2j}-\bar{y}_2)^2$	n_2-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$y_{k1}\ y_{k2}\ \cdots\ y_{kn_k}$	$\bar{y}_k$	$\sum_{j=1}^{n_k}(y_{kj}-\bar{y}_k)^2$	n_k-1

onde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ n_i \geqslant 2, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$

Definições

$$\text{SSE} = \text{soma de quadrados dos resíduos} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \hat{y}_i)^2$$

$$\text{SSEP} = \text{soma de quadrados do erro puro} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

$$\text{SSFA} = \text{soma de quadrados da falta de ajuste} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$$

Resultado

$$\text{SSE} = \text{SSEP} + \text{SSFA}$$

Prova do resultado

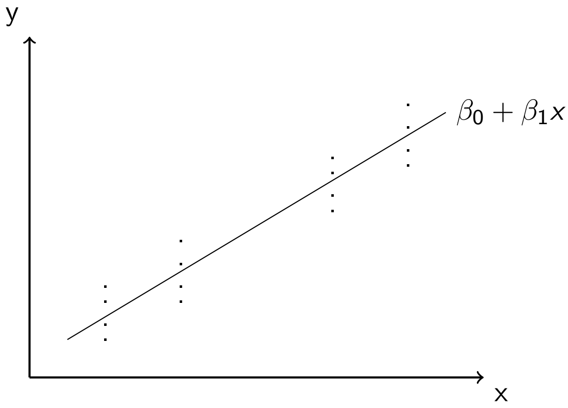
Considere: $e_i = y_{ij} - \hat{y}_i = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \hat{y}_i)$

$$
\begin{aligned}
\text{SSE} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \hat{y}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)\sum_{j=1}^{n_i}\cancelto{0}{(y_{ij} - \bar{y}_i)} \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}_{\text{SSEP}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{SSFA}}
\end{aligned}
$$

Observação: Se $n_i = 2$,

$$
\left(y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{(y_1 - y_2)^2}{2}
$$

Quando utilizamos o modelo linear, admitimos:



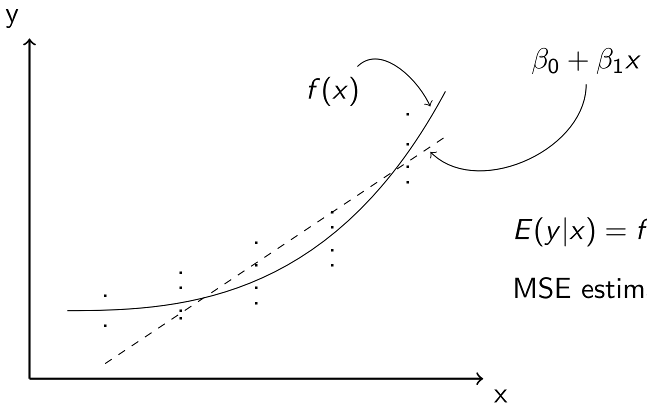
$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$

$\sigma^2_{Y|X} \rightarrow$ variância em torno da reta $\beta_0 + \beta_1 x$

MSE estima $\sigma^2_{Y|X}$

Se o modelo é $\beta_0+\beta_1 x$, $\sigma^2_{Y|X} = \sigma^2 = \text{Var}(Y)$ e MSE é um estimador não viciado de σ^2.

Se a situação real for:



$$E(y|x) = f(x) \neq \beta_0 + \beta_1 x$$

MSE estima $\sigma^2_{Y|X} > \sigma^2$

Se o modelo não é $\beta_0 + \beta_1 x$, MSE superestima σ^2.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SSEP}}{n-k}$$ qualquer que seja o modelo.

ANOVA para falta de ajustamento

FV	GL	SS	MS	F
falta de ajustamento	k-2	SSFA	MSFA	$F_{FA} = \dfrac{MSFA}{MSEP}$
erro puro	n-k	SSEP	MSEP	
resíduo	n-2	SSE		

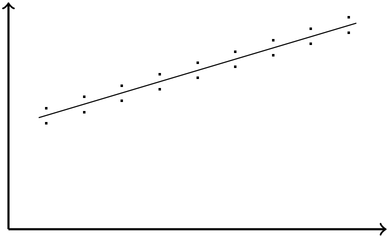
H_0 : o modelo é linear $[E(\epsilon_1) = E(\epsilon_2) = \cdots = E(\epsilon_k) = 0]$

Rejeitamos H_0 se $F_{FA} \geqslant F(k-2, n-k, \alpha)$

ANOVA

FV	GL	SS	MS	F	Hipótese
regressão	1	SSR	MSR	F	$\beta_1 = 0$
resíduo	n-2	SSE			
F. de ajuste	k-2	SSFA	MSFA	$F_{FA} = \frac{MSFA}{MSEP}$	O modelo é linear
E. puro	n-k	SSEP	MSEP		

a)



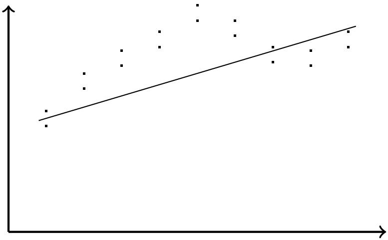
Bom

F sig.
F_{FA} não sig.

ANOVA

FV	GL	SS	MS	F	Hipótese
regressão	1	SSR	MSR	F	$\beta_1 = 0$
resíduo	n-2	SSE			
F. de ajuste	k-2	SSFA	MSFA	$F_{FA} = \dfrac{MSFA}{MSEP}$	O modelo é linear
E. puro	n-k	SSEP	MSEP		

b)



F sig.

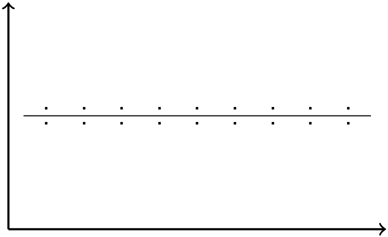
F_{FA} sig.

Novo modelo (2º grau)

ANOVA

FV	GL	SS	MS	F	Hipótese
regressão	1	SSR	MSR	F	$\beta_1 = 0$
resíduo	n-2	SSE			
F. de ajuste	k-2	SSFA	MSFA	$F_{FA} = \frac{MSFA}{MSEP}$	O modelo é linear
E. puro	n-k	SSEP	MSEP		

c)



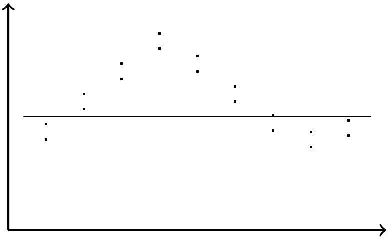
Bom

F não sig.
F_{FA} não sig.

ANOVA

FV	GL	SS	MS	F	Hipótese
regressão	1	SSR	MSR	F	$\beta_1 = 0$
resíduo	n-2	SSE			
F. de ajuste	k-2	SSFA	MSFA	$F_{FA} = \frac{MSFA}{MSEP}$	O modelo é linear
E. puro	n-k	SSEP	MSEP		

d)



F não sig.

F_{FA} sig.

Novo modelo (2º grau)

Draper

1. Obter o modelo. Construir ANOVA. Não testar $H_0 : \beta_1 = 0$ ainda.
2. Construir a ANOVA para a falta de ajustamento. Se F_{FA} sig., ir para 3a. Se F_{FA} não sig., ir para 3b.
3.
   - a) F_{FA} sig: Parar a análise deste modelo e procurar um melhor. Não fazer o teste F e nem construir intervalos de confiança. [As suposições nas quais esses cálculos são baseados não são verdadeiras se houver falta de ajuste].
   - b) F_{FA} não sig.: $\hat{\sigma}^2 =$MSE, testar $H_0 : \beta_1 = 0$, construir intervalos de confiança, calcular R^2, etc. Fazer análise de resíduos.

Montgomery and Peck (pág. 77)

- F_{FA} não significante e F ($\beta_1 = 0$) significante não garantem que o modelo será satisfatório para **previsão**.
- Alguns autores sugerem que para um modelo ser útil para previsão, devemos ter

$$F = \frac{\mathrm{MSR}}{\mathrm{MSE}} > 4\mathrm{F}_c.$$

- Usa-se também a medida:

$$\frac{\hat{y}_{max} - \hat{y}_{min}}{\sqrt{\frac{p\hat{\sigma}^2}{n}}},$$

onde p é o número de parâmetros na equação de regressão (reg. lin. simples $p = 2$), $\hat{\sigma}^2$ é a estimativa de σ^2 independente do modelo. Verifica-se que $\overline{V(\hat{y})} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\hat{y}_i) = \frac{p\sigma^2}{n}$

Exemplo

x_i	y_{ij}				n_i	$\bar{y}_i$	$\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	GL
20	96	92	106	100	4	98,5	107	3
25	98	104	110	101	4	103,25	78,75	3
30	116	106	109	100	4	107,75	132,75	3
35	112	105	118	108	4	110,75	94,75	3
40	113	112	127	117	4	117,25	140,75	3
					20		SSEP = 554	15

SSE = 563 SSEP = 554 SSFA = 563 - 554 = 9

ANOVA para falta de ajustamento

FV	GL	SS	MS	F
falta de ajustamento	3	9	3	0,0812 (não sig.)
erro puro	15	554	36,93	
resíduo	18	563	563	

H_0 : o modelo é linear.

Não temos evidências contra o modelo linear.