*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*
*Departamento de Engenharia Mecânica*

# *PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas*

## *Aula #05*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*24/08/2023*

# Agenda

1. Função de tensão de Airy (breve recapitulação do final da aula anterior)
2. Problemas 2D em coordenadas retangulares: solução por polinômios
3. Efeitos de extremidade. Princípio de Saint-Venant
4. Determinação dos deslocamentos
5. Flexão de uma viga em balanço carregada na extremidade
6. Solução do problema 2D na forma de séries de Fourier

# 1. Função de Tensão de Airy

Vimos que tanto para problemas de EPT quanto para problemas de EPD as equações resultantes obtidas são da forma (já desprezadas as forças distribuídas por unidade de volume):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Consideremos uma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Substituindo $\sigma_x$, $\sigma_y$ e $\tau_{xy}$, como definidos acima, nas eqs. diferenciais de equilíbrio e na equação de compatibilidade de deformações indicadas no slide anterior, obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla^4 \phi(x, y) = 0$$

Assim, se encontrarmos uma função $\phi = \phi(x, y)$ que seja biharmônica (ou seja, que atenda à condição):

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0,$$

então a solução de um problema 2D da Teoria da Elasticidade (em condições de EPT ou de EPD) é encontrado, desde que as condições de contorno sejam também atendidas.

## 2. Problemas 2D em coordenadas retangulares: solução por polinômios

Consideremos, inicialmente, a função de tensão de Airy, $\phi = \phi(x, y)$, formada por polinômios de segundo grau:

$$\phi_2(x, y) = \frac{A_2}{2}x^2 + B_2xy + \frac{C_2}{2}y^2.$$

É imediato verificar que tal função é biharmônica (satisfaz a condição $\nabla^4\phi(x, y) = 0$), de tal modo que pode ser empregada para encontrar a solução de um problema de EPT ou de EPD, bastando determinar o carregamento sobre o contorno. Considerando desprezíveis as forças distribuídas no volume, encontramos:

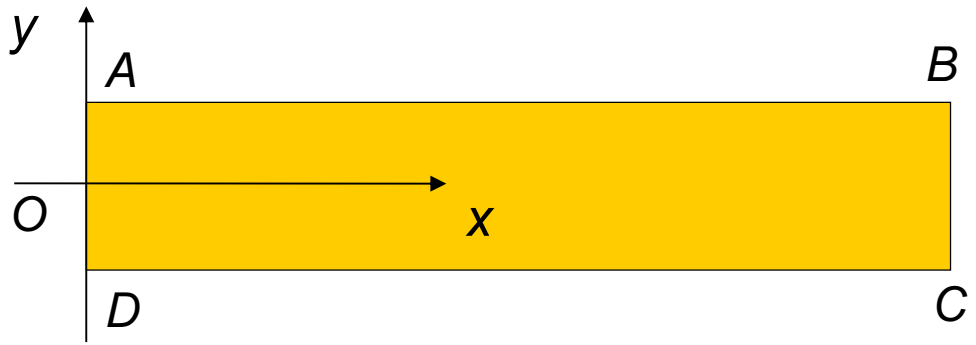
$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = C_2 \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = A_2 \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = -B_2$$

Nesse caso, as três componentes de tensão são constantes em todos os pontos do corpo, de tal forma que a função $\phi_2$ representa uma combinação de tensões uniformes, de tração ou compressão (de acordo com os sinais das constantes $C_2$ e $A_2$ ), segundo duas direções perpendiculares, e uma tensão uniforme de cisalhamento (de intensidade dada por $|B_2|$).

Naturalmente, as forças (distribuídas) aplicadas sobre o contorno do sólido devem ser tais que:

$$\{\vec{s}\} = \{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\}$$

Assim, aplicando tal condição para o caso de uma chapa retangular cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, teremos:



Sobre o contorno AB:

$$\vec{n} = (0,1) \Rightarrow \vec{s} = \begin{bmatrix} C_2 & -B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Sobre o contorno BC:

$$\vec{n} = (1,0) \Rightarrow \vec{s} = \begin{bmatrix} C_2 & -B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ -B_2 \end{bmatrix}$$

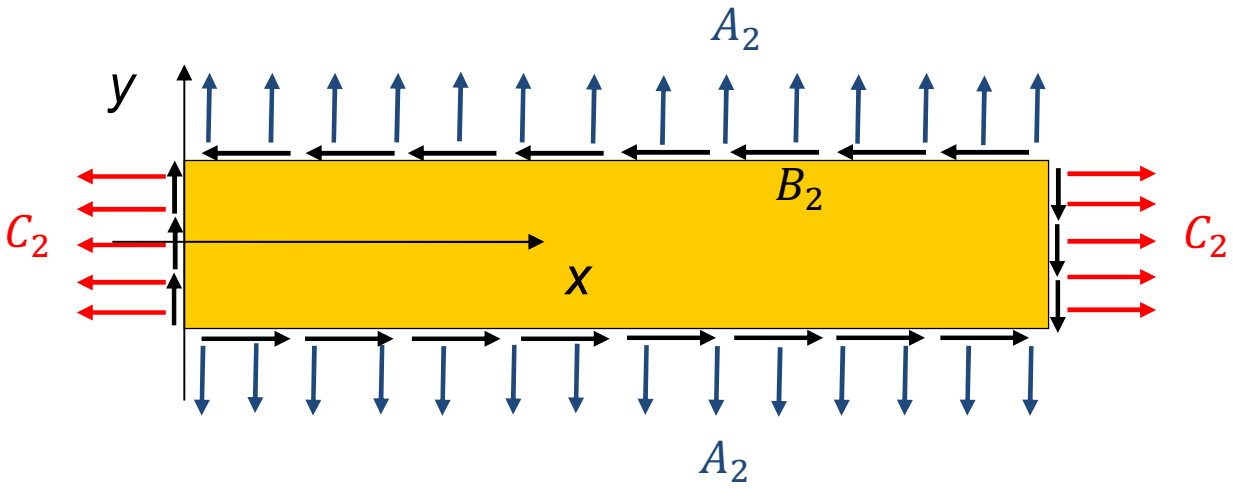
Sobre o contorno CD:

$$\vec{n} = (0,-1) \Rightarrow \vec{s} = \begin{bmatrix} C_2 & -B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ -A_2 \end{bmatrix}$$

Sobre o contorno DA:

$$\vec{n} = (-1,0) \Rightarrow \vec{s} = \begin{bmatrix} C_2 & -B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Resultando (para $A_2 > 0$, $B_2 > 0$ e $C_2 > 0$):



Consideremos, agora, a função de tensão de Airy, $\phi = \phi(x, y)$, formada por polinômios de terceiro grau:

$$\phi_3(x, y) = \frac{A_3}{6}x^3 + \frac{B_3}{2}x^2y + \frac{C_3}{2}xy^2 + \frac{D_3}{6}y^3$$

... que também é uma função biharmônica ($\nabla^4\phi(x, y) = 0$) e, portanto, pode ser empregada para encontrar a solução de um problema de EPT ou de EPD. Considerando desprezíveis as forças distribuídas no volume, teremos:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = C_3x + D_3y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = A_3x + B_3y$$

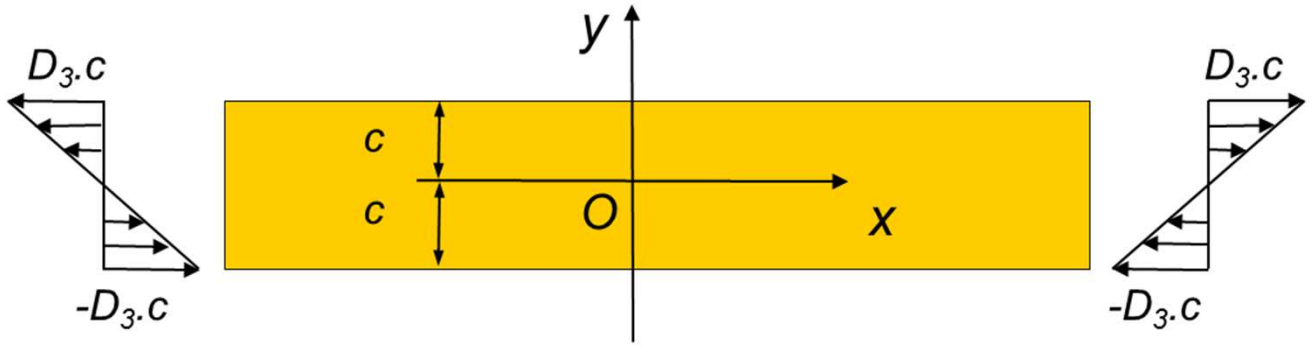
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -B_3x - C_3y$$

Obs: Note que algumas constantes aparecem em mais de uma componente de tensão, mostrando claramente que as deformações (associadas às tensões) não podem ser arbitrariamente escolhidas.

Tomando todas as constantes nulas, com exceção de $D_3$, teremos as distribuições:

$$\sigma_x = D_3 y \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

Aplicando tal condição à mesma chapa retangular, de lados paralelos aos eixos coordenados, teremos (para $D_3 > 0$):




(chapa sob flexão pura)

Obs: Note que, dimensionalmente, devemos ter $[D_3] = N/m^3$

Assim, denominando: $$D_3 = \frac{M_z}{I_z}$$

Teremos: $$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$$

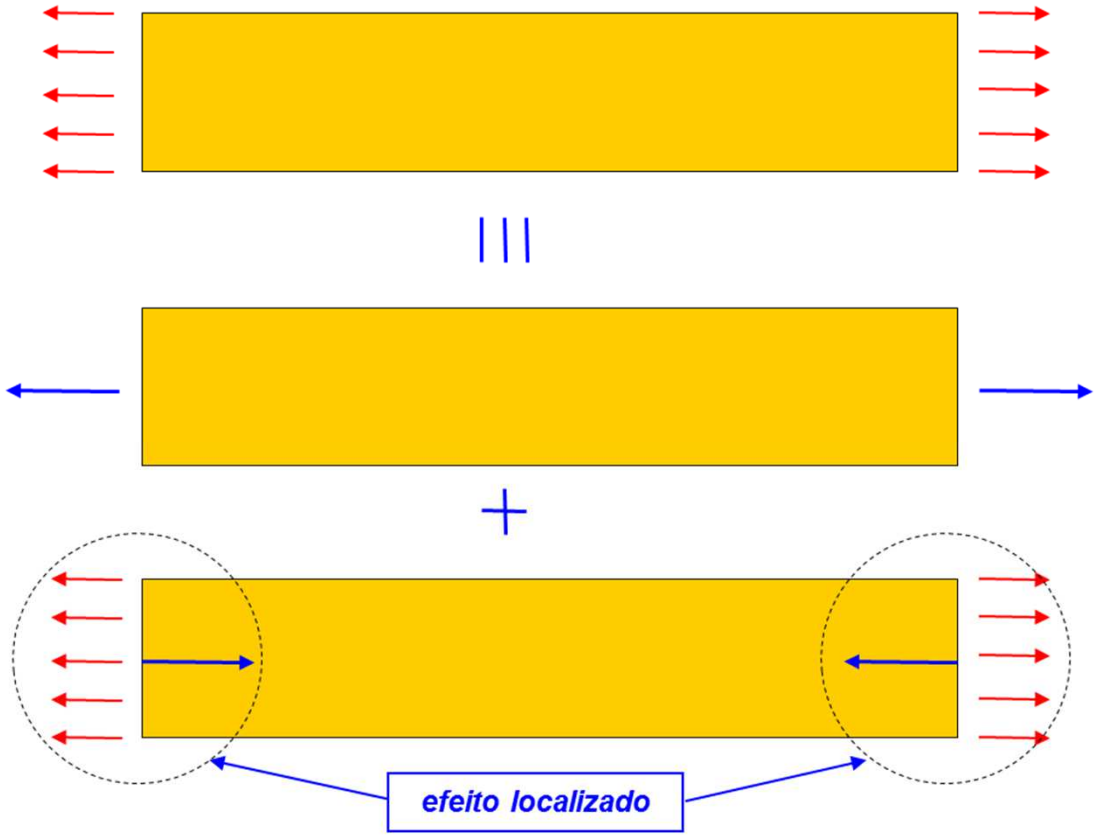
...que coincide com a distribuição dada pela teoria simples de viga.

## 3. Efeitos de Extremidade. Princípio de Saint-Venant

Vimos que a função de tensão de Airy permite determinar a distribuição de tensões em problemas de EPT e de EPD, desde que os esforços distribuídos no contorno do sólido estejam aplicados da mesma forma que a prevista pela solução.

Contudo, segundo Saint-Venant, mudanças na forma de aplicação do carregamento nas extremidades (sem alterar o valor da resultante) acarretam apenas modificações localizadas na distribuição de tensões e deformações, pouco afetando a distribuição de tensões e deformações em pontos distantes dos contornos.

A mudança na distribuição do carregamento equivale à superposição de um sistema estaticamente equivalente à força e momento nulos, conforme ilustra a figura abaixo:



## 4. Determinação dos deslocamentos

Quando as componentes de tensão são calculadas a partir de uma função de tensão, as componentes de deformação podem ser obtidas a partir da Lei de Hooke, e as componentes de deslocamento ($u$ e $v$) podem ser obtidas diretamente a partir da integração das relações deformações-deslocamentos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

Podemos notar também que as componentes de deformação permanecem inalteradas se adicionarmos aos deslocamentos $u$ e $v$ funções da forma:

$$u^* = A + By$$

$$v^* = C - Bx$$

Tais funções correspondem a movimentos de corpo rígido, não alterando a distribuição de tensões e deformações no interior do sólido.

*A, C* ⇒ movimentos de translação de C.R.

*B* ⇒ pequeno ângulo de rotação de C.R. em torno do eixo z

Observe também que o tensor gradiente dos deslocamentos, obtido com o campo de deslocamentos dado por $u^*$ e $v^*$, é dado por:

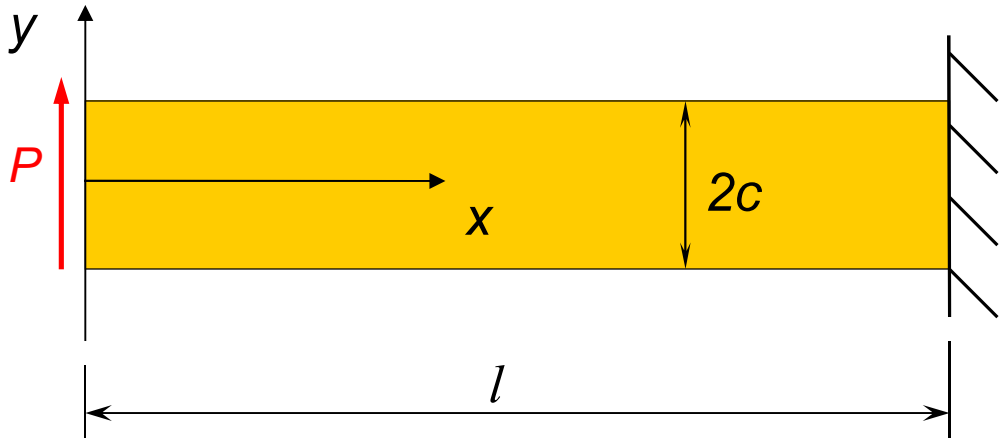
$$\begin{cases} u^* = A + By \\ v^* = C - Bx \end{cases} \Rightarrow [L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u^*}{\partial x} & \dfrac{\partial u^*}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v^*}{\partial x} & \dfrac{\partial v^*}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix}$$

Levando a:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas: $$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2} = \begin{bmatrix} B^2/2 & 0 \\ 0 & B^2/2 \end{bmatrix}$$

## 5. Flexão de uma viga em balanço carregada na extremidade




Seja a função de tensão dada por:

$$\phi(x,y) = B_2.x.y + \frac{D_4}{6}.x.y^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = D_4.x.y \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -B_2 - \dfrac{D_4}{2}.y^2 \end{cases}$$

Impondo que: $\tau_{xy} = 0 \quad \text{para } y = \pm c$

Virá: $B_2 = -\frac{D_4}{2}.c^2$

E como: $\iint_S \tau_{xy}.dS = -P$ (em $x = 0$)

Resulta: $B_2 = \frac{3}{4}.\frac{P}{t.c}$ (onde $t$ é a espessura da chapa)

Logo: $D_4 = -\frac{2B_2}{c^2} = -\frac{3}{2}\frac{P}{tc^3} = -\frac{P}{t(2c)^3/12} = -\frac{P}{I_z}$

Resultando, por fim:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{P.x.y}{I_{zz}} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{P}{2.I_{zz}}.\left(c^2 - y^2\right) \end{cases}$$

...que coincide com os resultados da teoria simples de viga.

E, para o campo de deformações, obtemos, pela Lei de Hooke:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} = -\dfrac{P.x.y}{E.I} \\ \varepsilon_y = \dfrac{-\nu.\sigma_x}{E} = \dfrac{\nu.P.x.y}{E.I} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = -\dfrac{P}{2.G.I}.\left(c^2 - y^2\right) \end{cases}$$

E, para o campo de deslocamentos:

$$u(x,y) = -\frac{P.x^2.y}{2.EI} - \frac{\nu.P.y^3}{6.EI} + \frac{P.y^3}{6.GI} + \left(\frac{P.l^2}{2.EI} - \frac{P.c^2}{2.GI}\right).y$$

$$v(x,y) = \frac{\nu.P.x.y^2}{2.EI} + \frac{P.x^3}{6.EI} - \frac{P.l^2.x}{2.EI} + \frac{P.l^3}{3.EI}$$

onde foram utilizadas as seguintes condições para impedir os deslocamentos de corpo rígido:

$$\begin{cases} x = l \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

# 6. Solução do problema 2D na forma de séries de Fourier

Vimos que a determinação do campo de tensões em problemas de EPT e EPD pode ser feita em certos casos utilizando-se a função de tensão na forma de um polinômio.

Uma generalidade bem maior do problema pode ser obtida tomando-se a função de tensão na forma de uma série de Fourier (seja na variável $x$, seja na variável $y$, ou em ambas as variáveis).

Aplicando-se tal método a chapas retangulares, de lados paralelos aos eixos coordenados e carregadas apenas sobre os bordos superior e inferior, podemos observar que as componentes do carregamento podem apresentar descontinuidades uma vez que tais descontinuidades podem ser bem representadas através de um número suficiente de termos da série de Fourier.

Tomando, por exemplo, a função de tensão na forma:

$$\phi(x,y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right).f(y)$$

onde $m$ é um número inteiro, teremos a seguinte relação obtida a partir da equação de compatibilidade:

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} - 2\alpha^2.\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \alpha^4.f(y) = 0$$

onde: $\alpha = \dfrac{m.\pi}{l}$

A solução da E.D.O. acima fornece:

$$f(y) = C_1.\cosh(\alpha y) + C_2.\text{senh}(\alpha y) + C_3.y.\cosh(\alpha y) + C_4.y.\text{senh}(\alpha y)$$

Resultando para a função de tensão:

$$\phi(x,y) = sen(\alpha x).\left[C_1.\cosh(\alpha y) + C_2.\text{senh}(\alpha y) + C_3.y.\cosh(\alpha y) + C_4.y.\text{senh}(\alpha y)\right]$$

e para o campo de tensões (desprezando as forças de volume):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} = sen(\alpha x).\left[C_1.\alpha^2.\cosh(\alpha y) + C_2.\alpha^2.\text{senh}(\alpha y) + \right.$$
$$\left. + C_3.\alpha.\left(2.\text{senh}(\alpha y) + \alpha.y.\cosh(\alpha y)\right) + C_4.\alpha.\left(2.\cosh(\alpha y) + \alpha.y.\text{senh}(\alpha y)\right)\right]$$

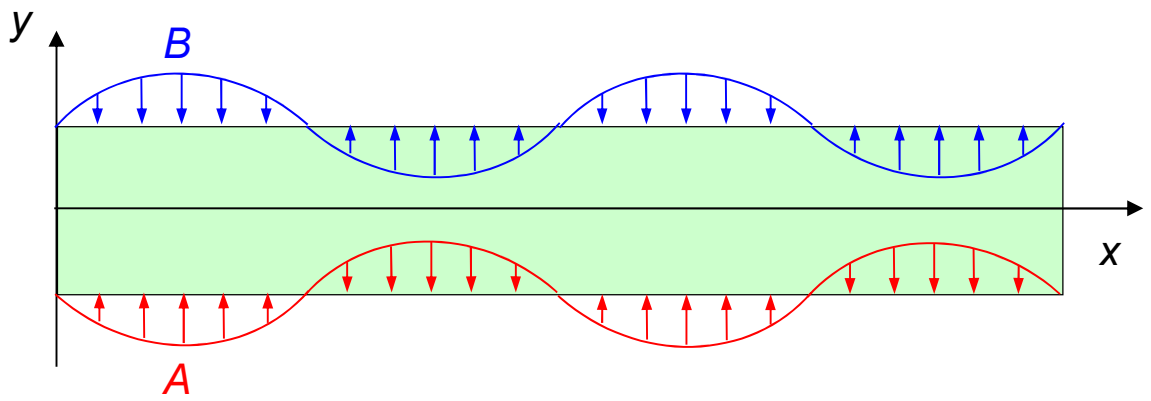
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} = -\alpha^2.sen(\alpha x).\left[C_1.\cosh(\alpha y) + C_2.\text{senh}(\alpha y) + \right.$$
$$\left. + C_3.y.\cosh(\alpha y) + C_4.y.\text{senh}(\alpha y)\right]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y} = -\alpha.\cos(\alpha x).\left[C_1.\alpha.\text{senh}(\alpha y) + C_2.\alpha.\cosh(\alpha y) + \right.$$
$$\left. + C_3.\left(\cosh(\alpha y) + \alpha.y.\text{senh}(\alpha y)\right) + C_4.\left(\text{senh}(\alpha y) + \alpha.y.\cosh(\alpha y)\right)\right]$$

Observamos que as constantes de integração $C_1$, $C_2$, $C_3$ e $C_4$ podem ser obtidas diretamente das condições de contorno aplicadas ao bordo superior e inferior da viga. Por exemplo, admitindo que os carregamentos nos bordos inferior e superior da chapa sejam dados por:

$$\vec{s}_{bi} = +A.sen(\alpha.x).\vec{e}_y \qquad (A > 0)$$ (bordo inferior: $y = -c$)

$$\vec{s}_{bs} = -B.sen(\alpha.x).\vec{e}_y \qquad (B > 0)$$ (bordo superior: $y = +c$)




$$\alpha = \frac{4\pi}{l}$$

Utilizando as expressões obtidas para as tensões, teremos quatro equações a quatro incógnitas ($C_1$, $C_2$, $C_3$ e $C_4$ ). A solução do sistema fornece:

$$C_1 = \frac{(A+B)}{\alpha^2} \cdot \frac{\left[\text{senh}(\alpha.c) + \alpha.c.\cosh(\alpha.c)\right]}{\left[\text{senh}(2\alpha.c) + 2\alpha.c\right]}$$

$$C_2 = -\frac{(A-B)}{\alpha^2} \cdot \frac{\left[\cosh(\alpha.c) + \alpha.c.\text{senh}(\alpha.c)\right]}{\left[\text{senh}(2\alpha.c) - 2\alpha.c\right]}$$

$$C_3 = \frac{(A-B)}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha.\cosh(\alpha.c)}{\left[\text{senh}(2\alpha.c) - 2\alpha.c\right]}$$

$$C_4 = -\frac{(A+B)}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha.\text{senh}(\alpha.c)}{\left[\text{senh}(2\alpha.c) + 2\alpha.c\right]}$$

e a partir daí temos os campos de tensões e deformações completamente definidos.

No caso mais geral, a distribuição das cargas verticais ao longo dos bordos superior e inferior da chapa pode ser representada pelas séries de Fourier completas:

$$q_{bi} = A_o + \sum_{m=1}^{\infty} A_{ms}.\text{sen}\left(\frac{m.\pi.x}{l}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mc}.\cos\left(\frac{m.\pi.x}{l}\right)$$

$$q_{bs} = B_o + \sum_{m=1}^{\infty} B_{ms}.\text{sen}\left(\frac{m.\pi.x}{l}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mc}.\cos\left(\frac{m.\pi.x}{l}\right)$$

*Referências:*

[1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.