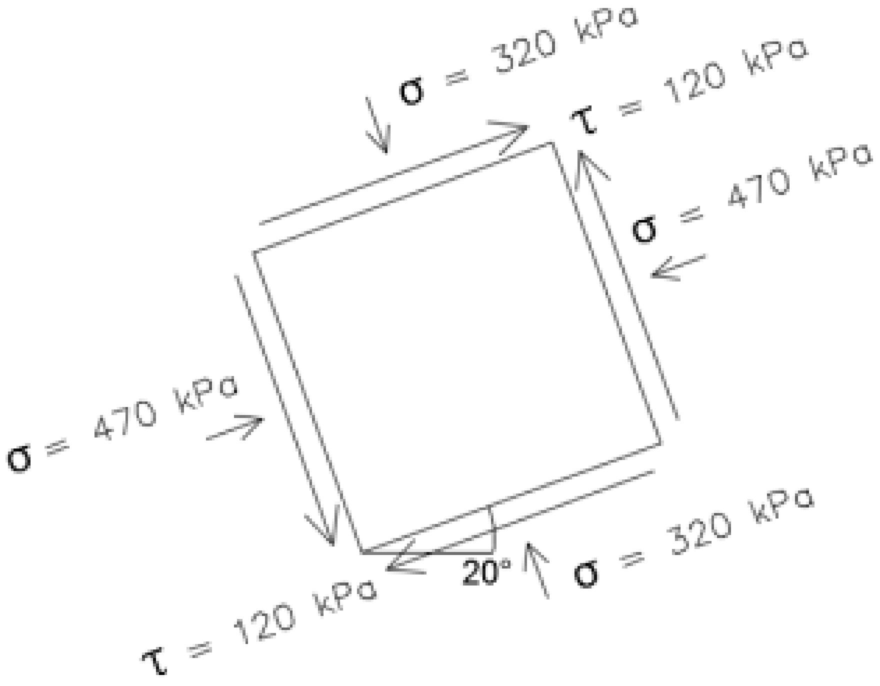
| Aula de Exercícios: Lista I

| Ex. 7

7ª. Questão.

Dado o elemento de solo abaixo:



a) Determinar os valores de σ_1 e σ_3 e suas respectivas direções.

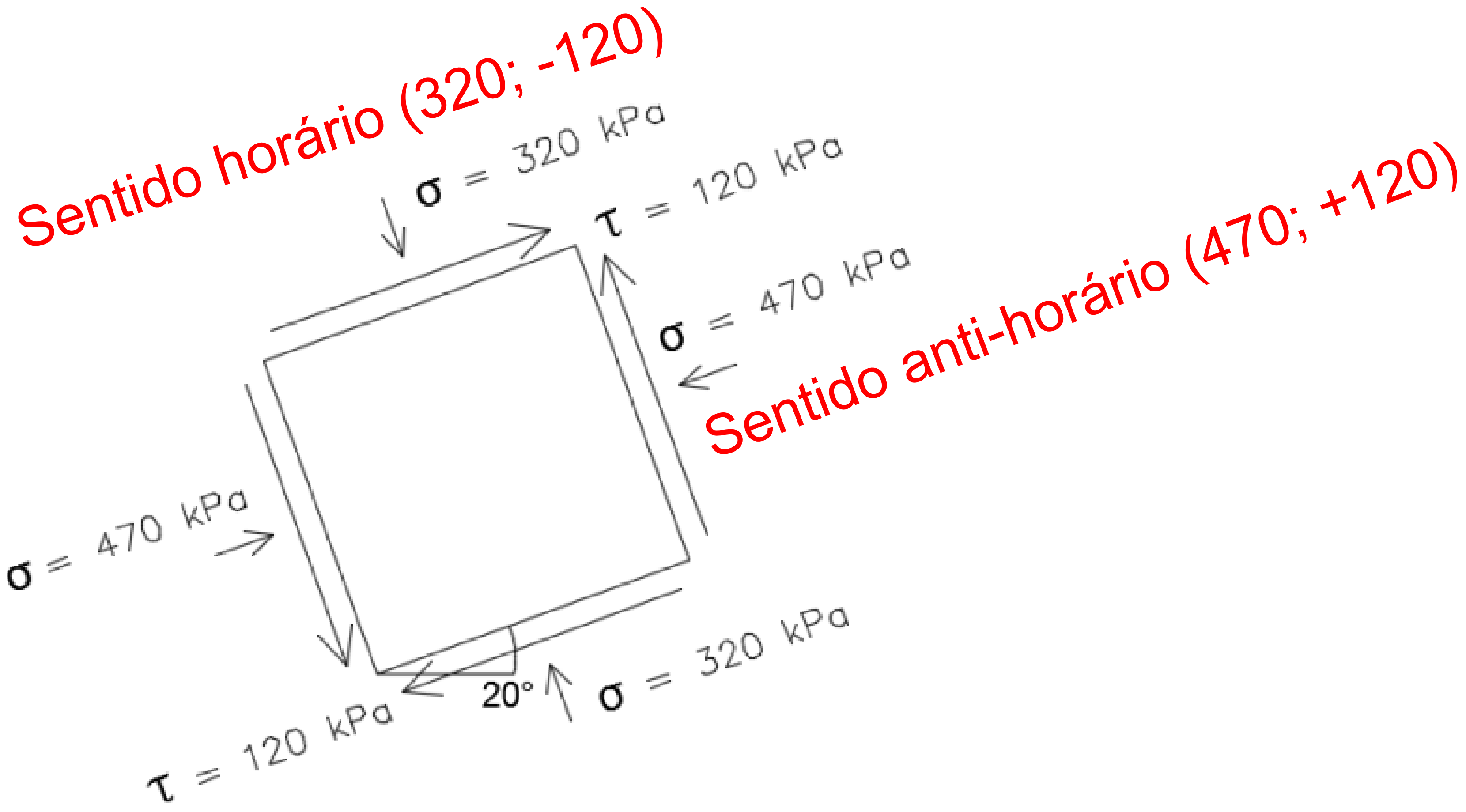
b) Sabendo-se que se trata de uma areia com $\varphi' = 30$, verificar a situação do elemento com relação à ruptura.

c) Qual o valor de σ_{max} que se obtém em um ensaio de cisalhamento direto com $\tau = 400\ kN/m^2$.

d) Qual o valor de $(\sigma_1 - \sigma_3)_{max}$ que se obtém em um ensaio triaxial adensado drenado com $\sigma_3 = 300\ kN/m^2$.

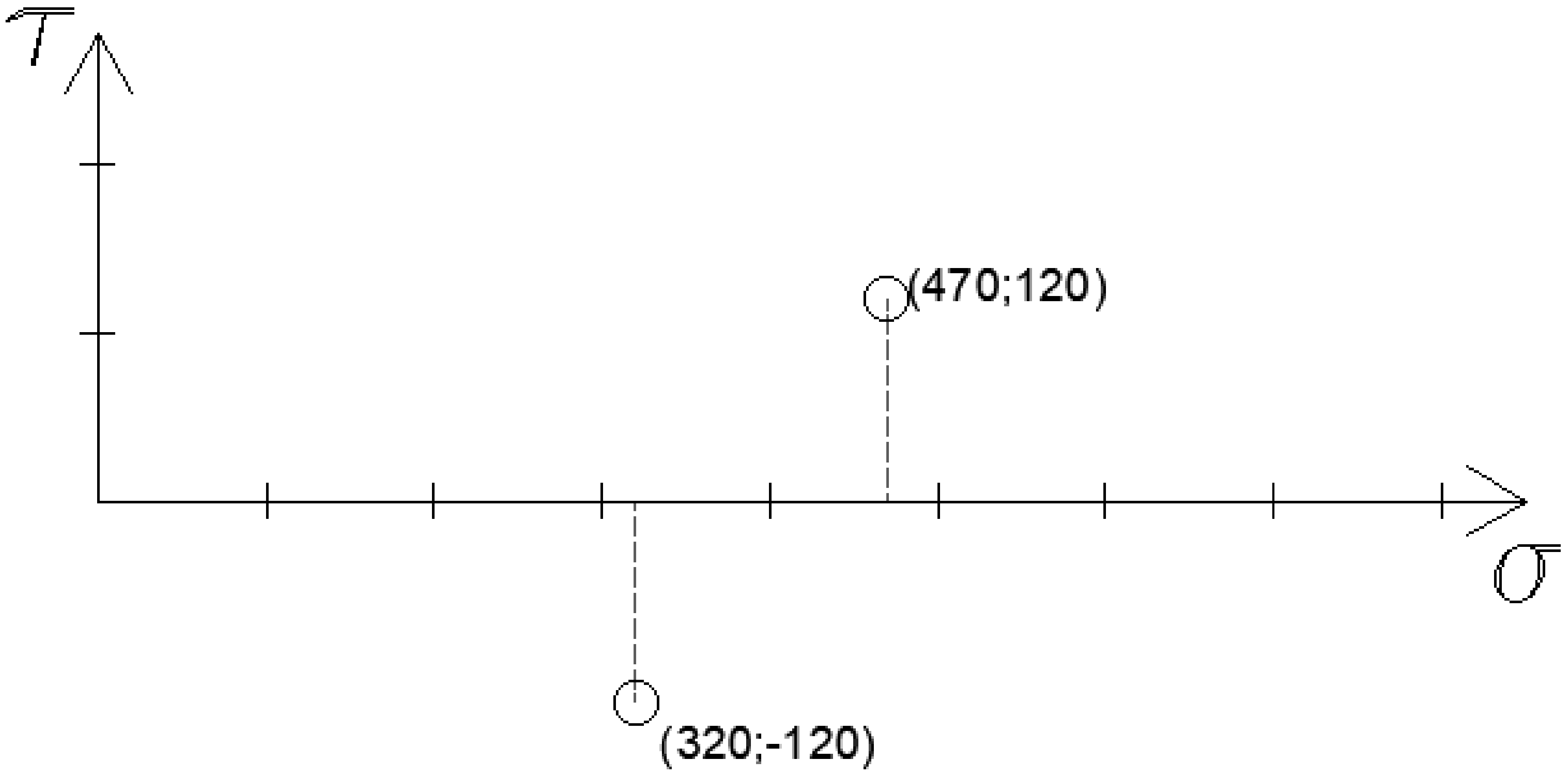
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a) Passo 1: Verificar o sinal das tensões cisalhantes



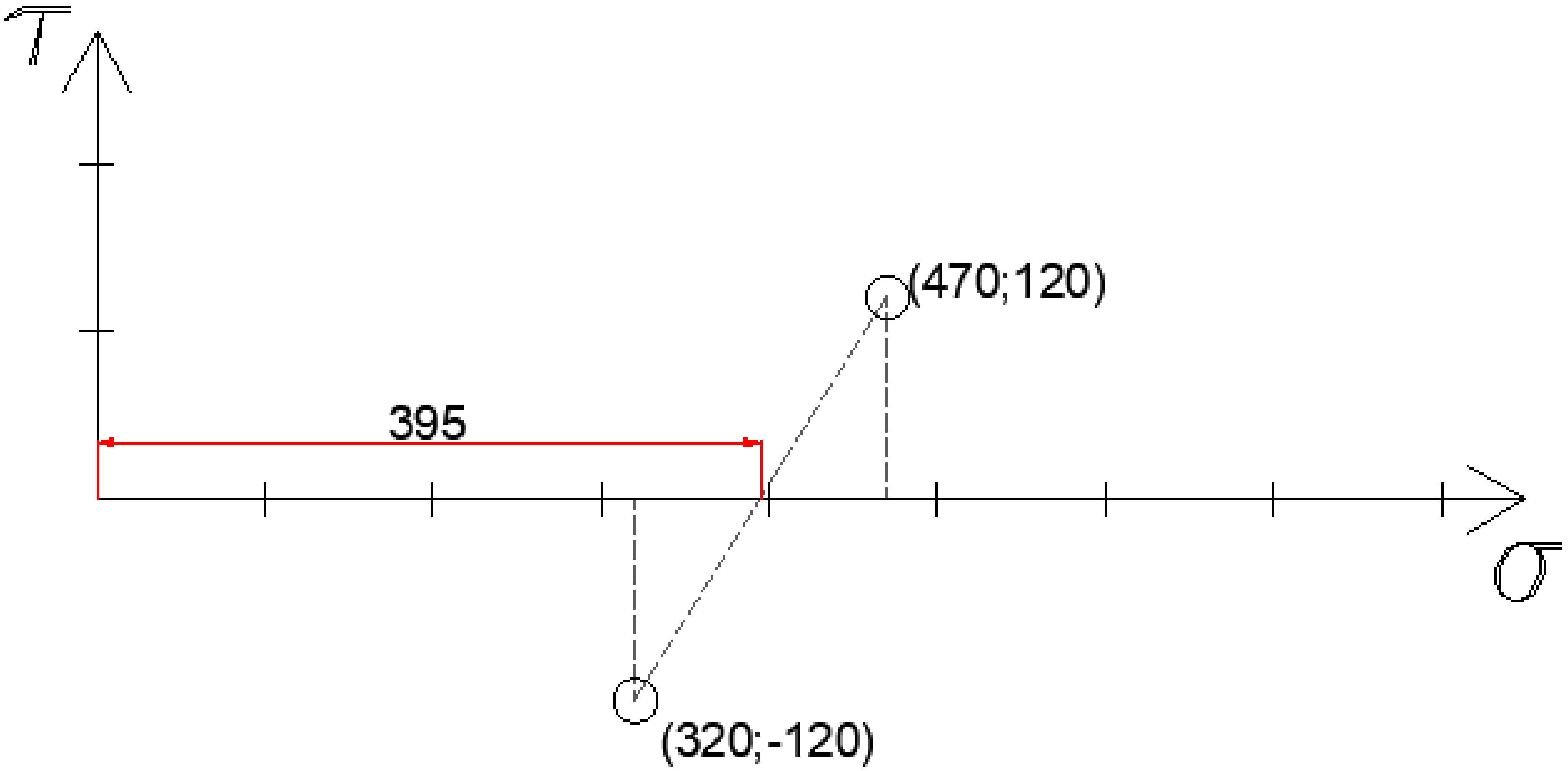
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a) Passo 2: Marcar os pontos no gráfico τ x σ



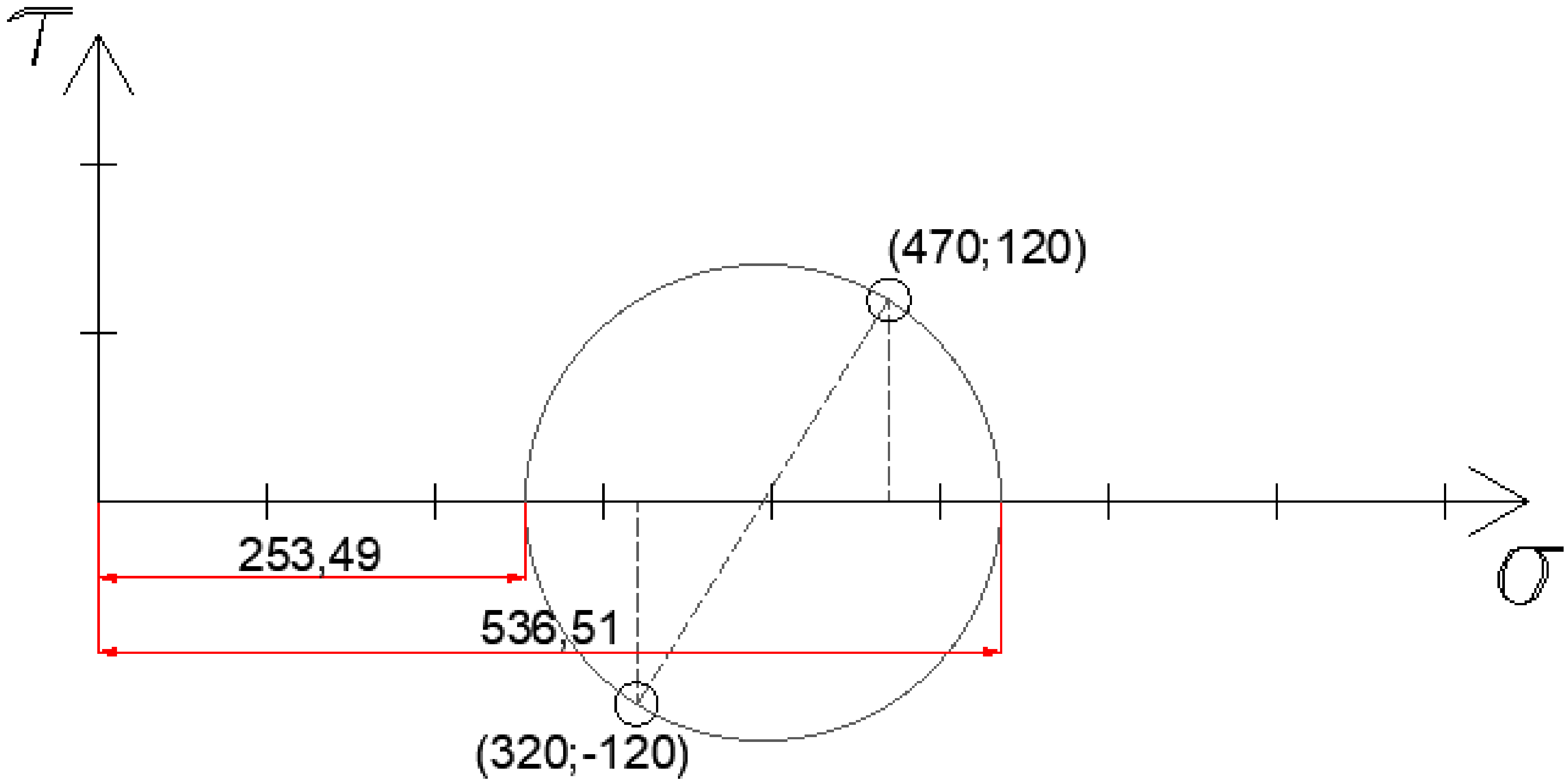
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a) Passo 3: Ligar os pontos e encontrar o centro do círculo



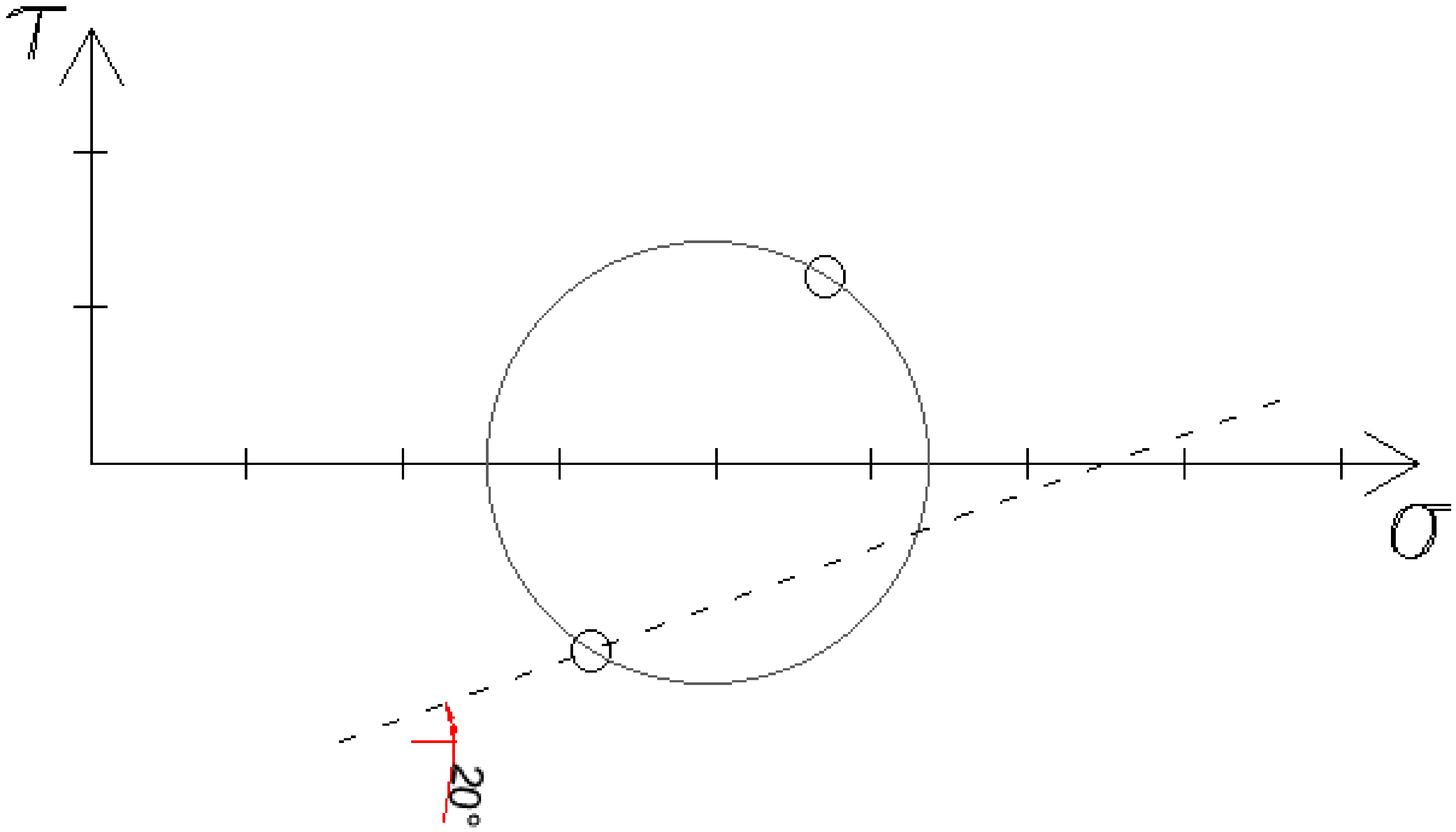
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a) Passo 4: Traçar o círculo e encontra as tensões principais



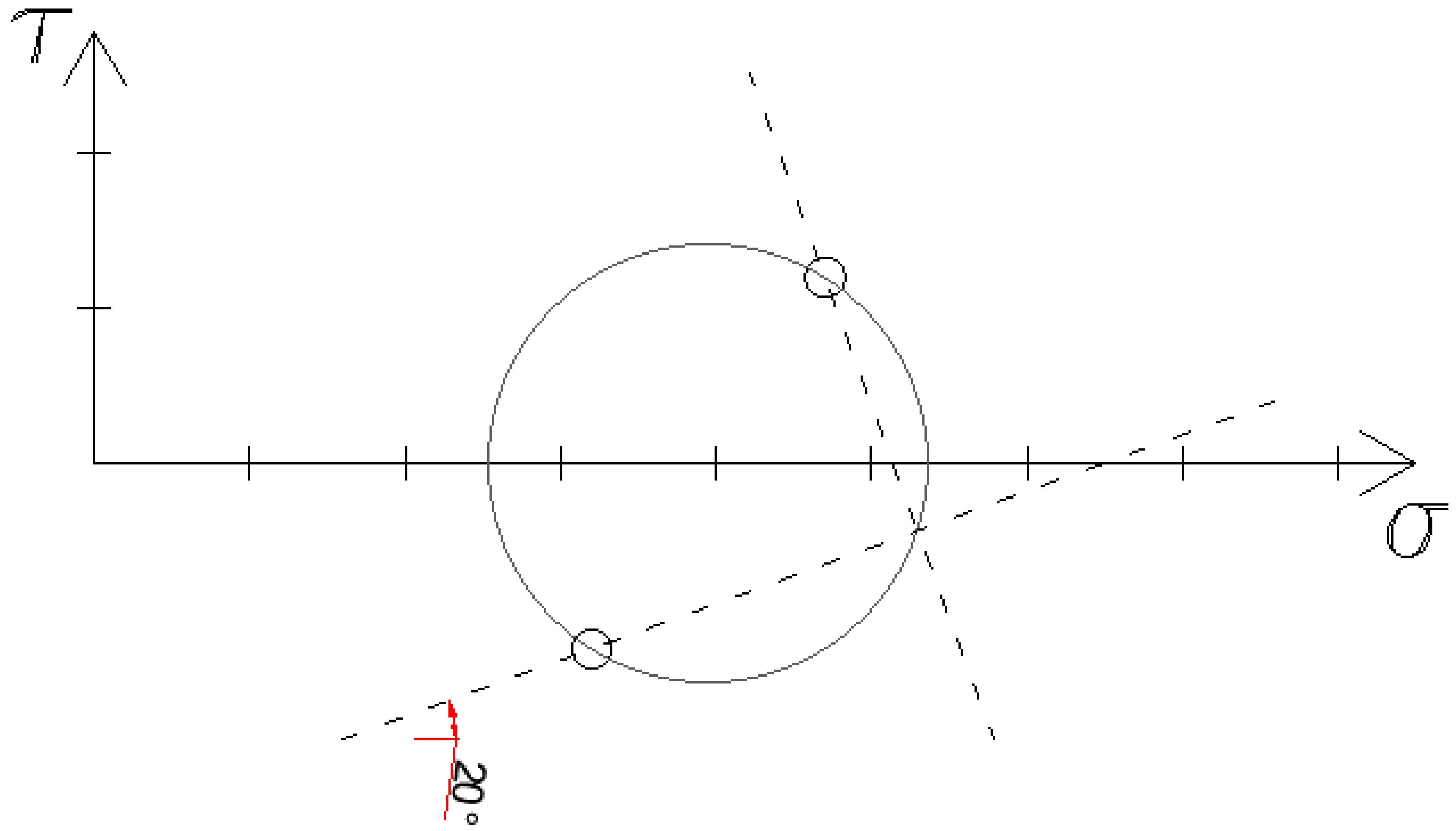
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a') Direções das tensões principais – Passo 1: Traçar os planos conhecidos



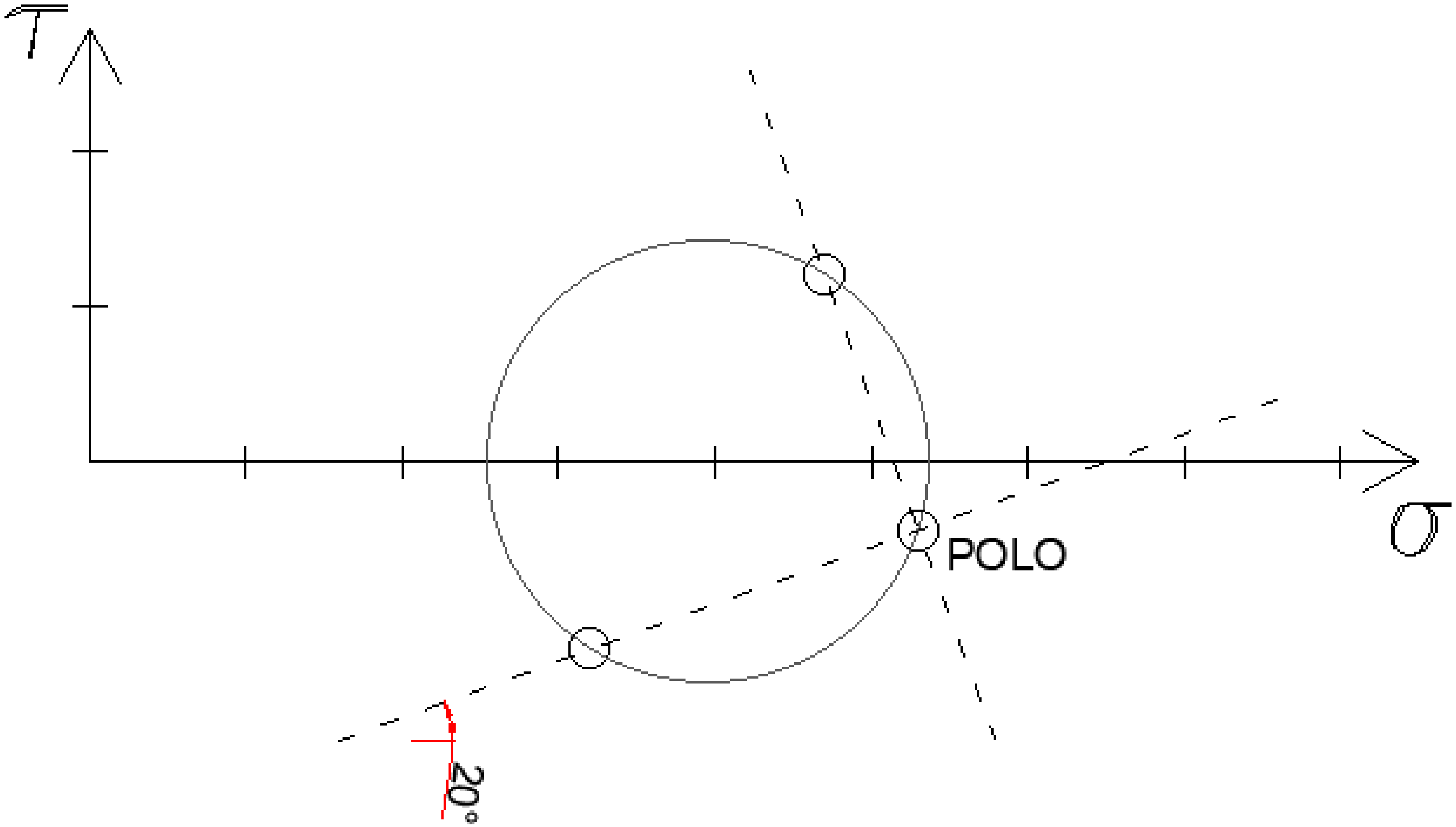
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a') Direções das tensões principais – Passo 1: Traçar os planos conhecidos



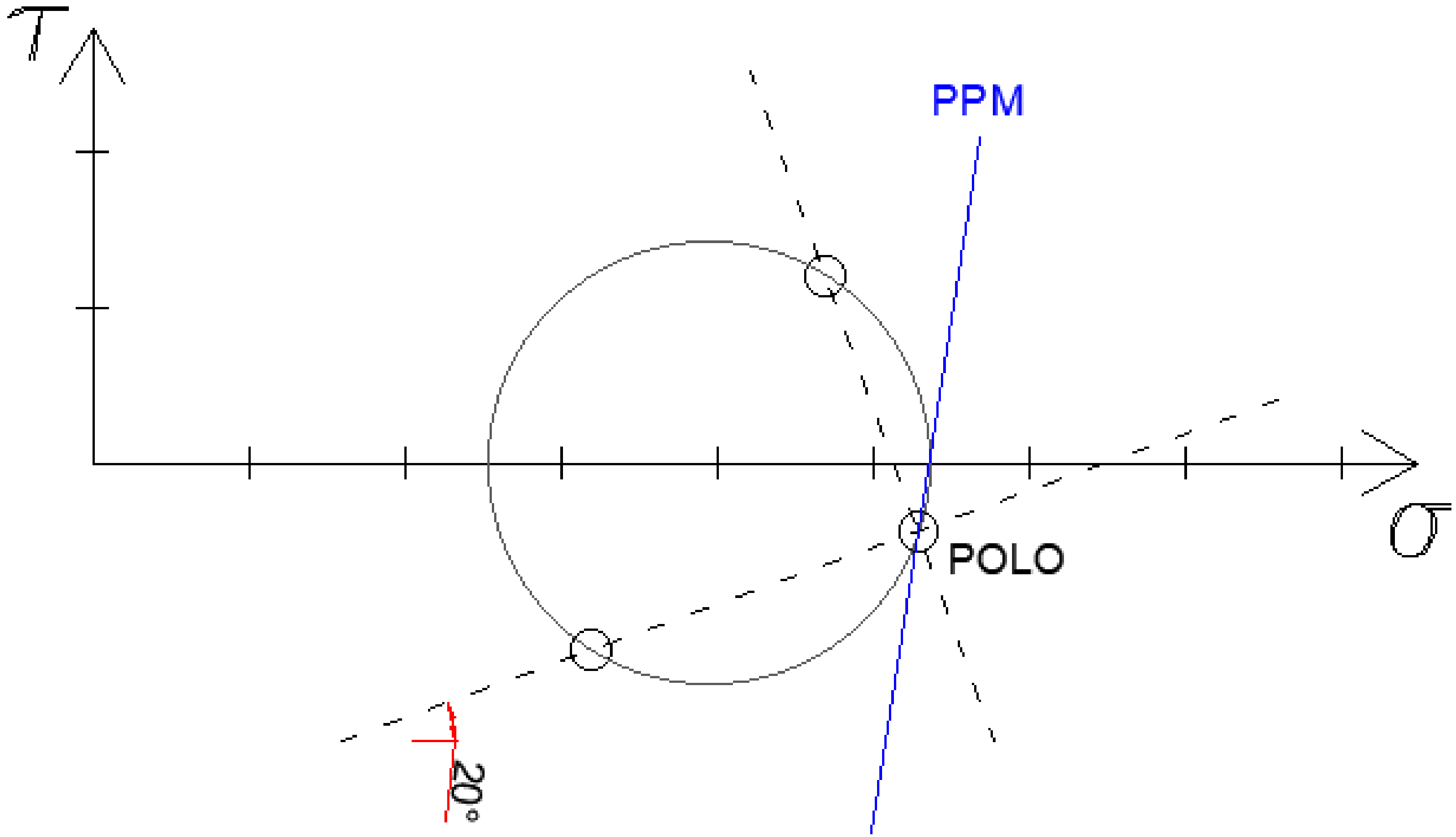
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a') Passo 2: Marcar o POLO



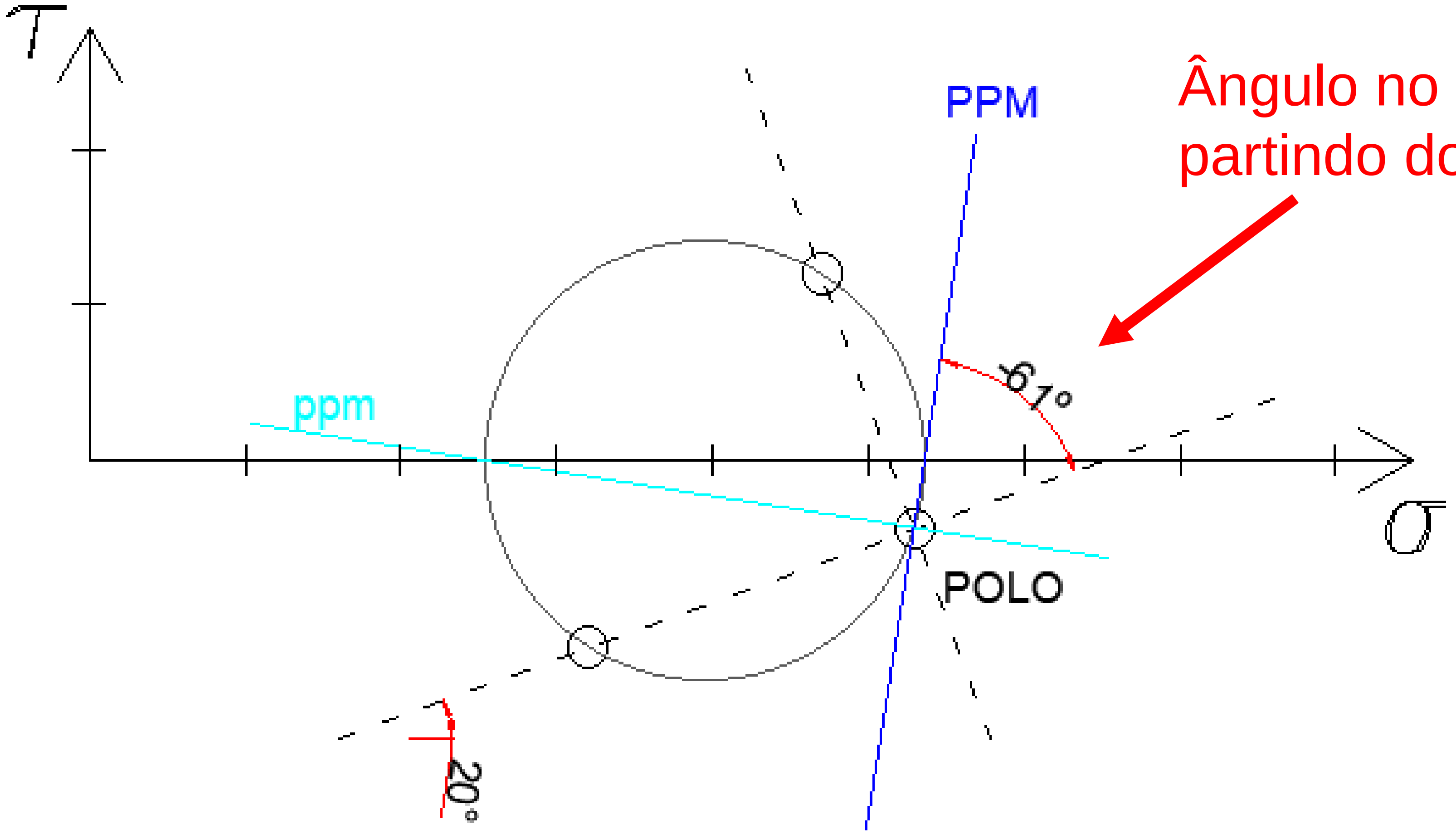
| Ex. 7: Resolução Gráfica

a') Passo 3: Encontrar o Plano Principal Maior (PPM)



| Ex. 7: Resolução Gráfica

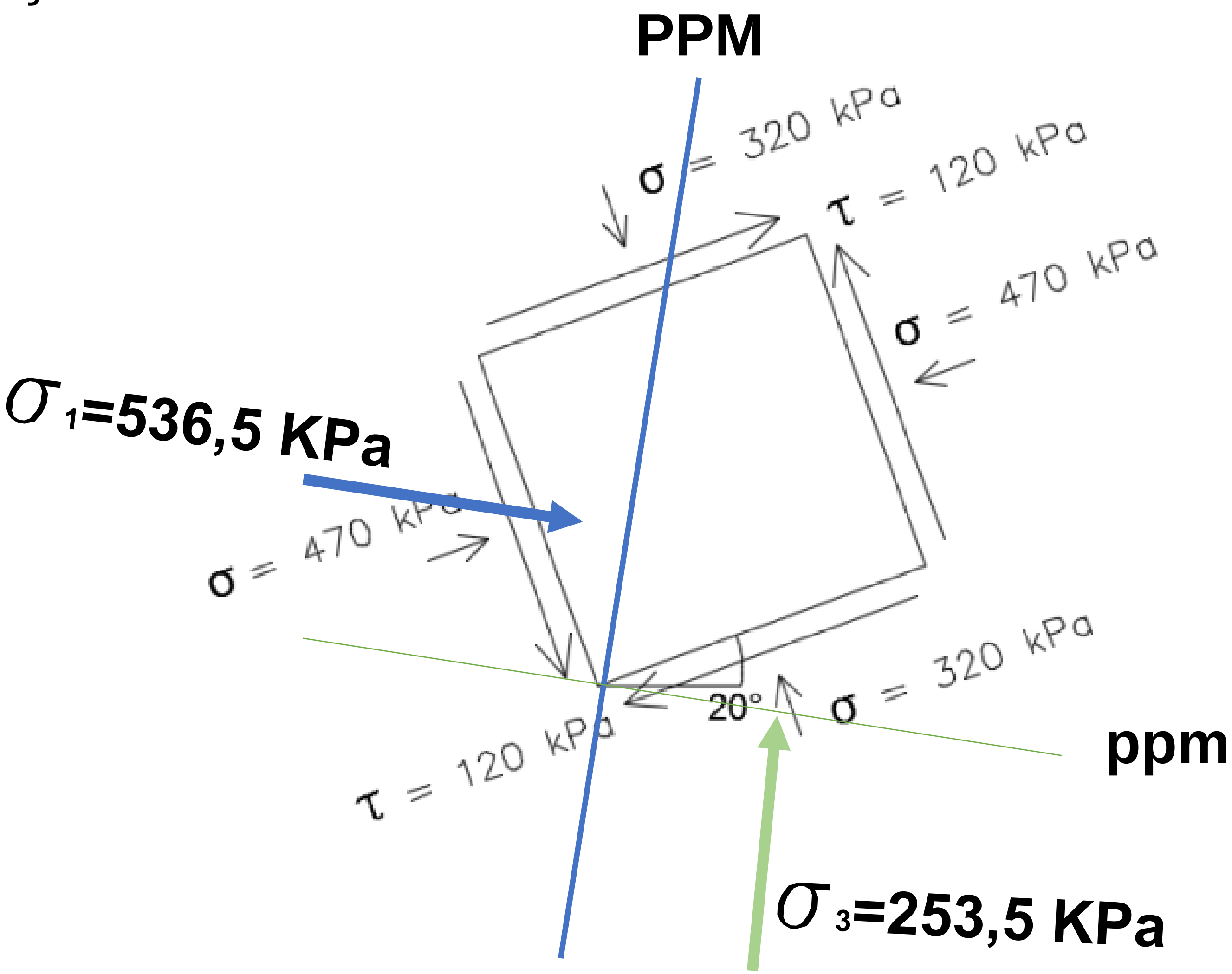
a’) Passo 4: Encontrar o plano principal menor (ppm)



Ângulo no sentindo horário partindo do PPM (-)

| Ex. 7: Resolução Gráfica

a') Representação



| Ex. 7: Resolução analítica

a) **Cálculo das Tensões Principais (σ_1 e σ_3)**

No caso apresentado, em que as tensões de cisalhamento são iguais e de sentido oposto, e as tensões normais diferentes, pode-se calcular o centro do Círculo de Mohr:

$$C = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2}$$

Em que C é o centro do círculo de Mohr. Do exercício, σ_a=470 KPa e σ_b=320 KPa.

Dessa mesma forma, o centro pode ser obtido pelas tensões principais, tal que:

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2}$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 395\ KPa\ (\mathbf{I})$$

O círculo de Mohr pode ser descrito pela equação da circunferência:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = R^2$$

Nessa equação σ e τ são pares de ponto no círculo e o raio R é:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Substituindo o ponto conhecido no círculo (320, -120), é possível encontrar o valor do raio:

$$R = \sqrt{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau} = \sqrt{(320 - 395)^2 + (-120)^2}$$
$$= 141{,}5\ KPa$$

A relação entre tensões principais é:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 141{,}5\ KPa\ (\mathbf{II})$$

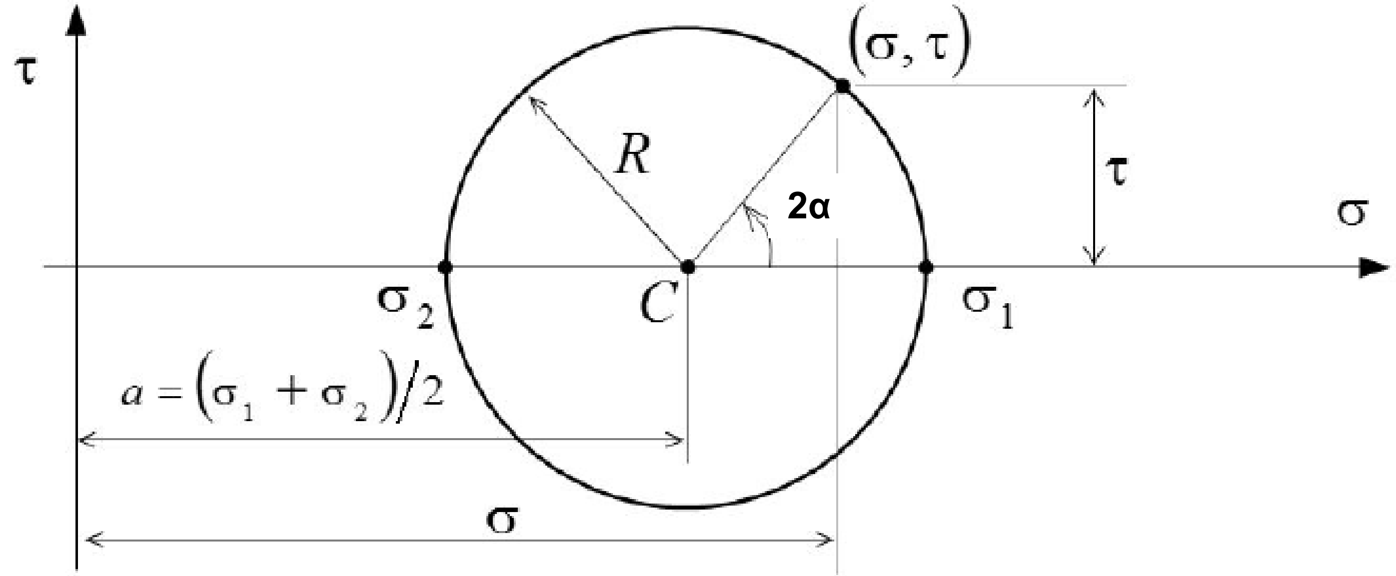
As tensões principais são calculadas pelo sistema formado pelas equações I e II:

$$\therefore \boldsymbol{\sigma_1 = 536,5\ KPa}\ ;\ \boldsymbol{\sigma_3 = 253,5\ KPa}$$

| Ex. 7: Resolução analítica

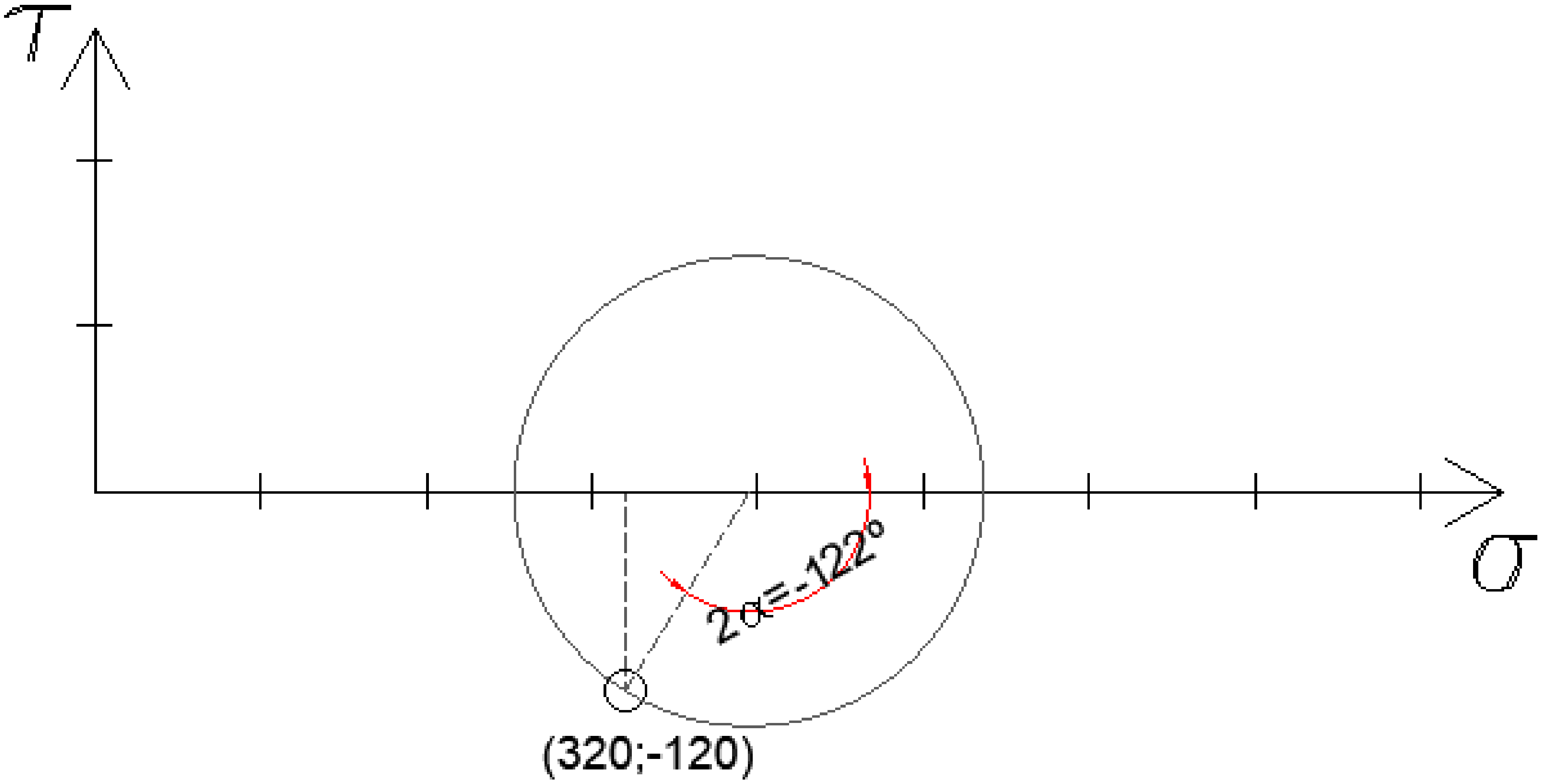
a') **Direções Principais**: Relembrando, o ângulo **α** é medido no sentido anti-horário a partir do PPM.

No círculo de Mohr, este ângulo é medido a partir da horizontal, no sentido anti-horário quando positivo. O ângulo formado entre a horizontal e a reta entre o centro do círculo e o ponto em estudo forma **2α**.

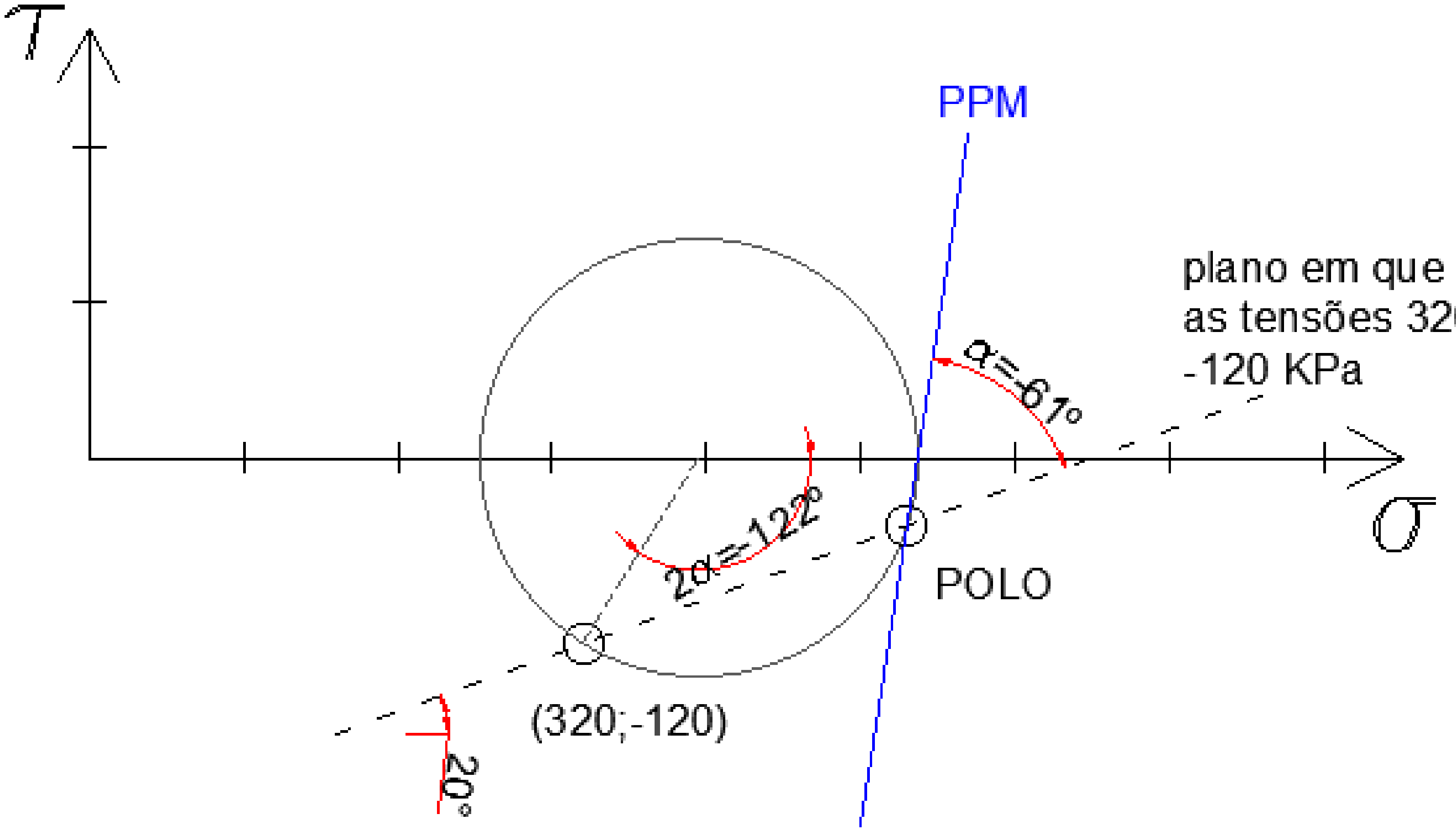


| Ex. 7: Resolução analítica

a') No exercício para o ponto (320;-120), partindo do sentido **horário** tem-se o valor de **α=-61º**..



a') As propriedades descritas são ilustradas na Figura abaixo, em que o plano analisado faz **α=-61º** com o PPM. O ângulo entre a horizontal e a reta que liga o ponto ao centro do círculo forma **2α=-122º** com o círculo.



| Ex. 7: Resolução analítica

a') Aplicando as equações analíticas, tem-se:

I: $\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \cos 2\alpha = 395 + 141{,}5 \cos -122º = 320\ KPa$

II: $\tau = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = 141{,}5 \operatorname{sen} -122º = -120\ KPa$

Note que realizando o caminho inverso para obter **α**, levaria a diferentes possibilidades.

Pode-se realizar o seguinte procedimento em dois passos.

| Ex. 7: Resolução analítica

a') Para o ponto (320;-120):

No primeiro passo, calcula **α** com a equação I:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \rightarrow \alpha = \pm 61º$$

No segundo passo, verificar qual **α** retorna o valor correto de τ com a equação II:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \rightarrow \alpha = +61º \rightarrow \tau = 120\ KPa\ (não\ ok!)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \rightarrow \alpha = -61º \rightarrow \tau = -120\ KPa\ (ok!)$$

| Ex. 7: Resolução analítica

a') Para o ponto (470;120):

Repete-se o procedimento. Calcula-se o ângulo:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \rightarrow \alpha = \pm 29º$$

Verifica o valor de τ

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\operatorname{sen} 2\alpha \rightarrow \alpha = 29º \rightarrow \tau = 120\ KPa\ (ok!)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\operatorname{sen} 2\alpha \rightarrow \alpha = -29º \rightarrow \tau = -120\ KPa\ (não\ ok!)$$

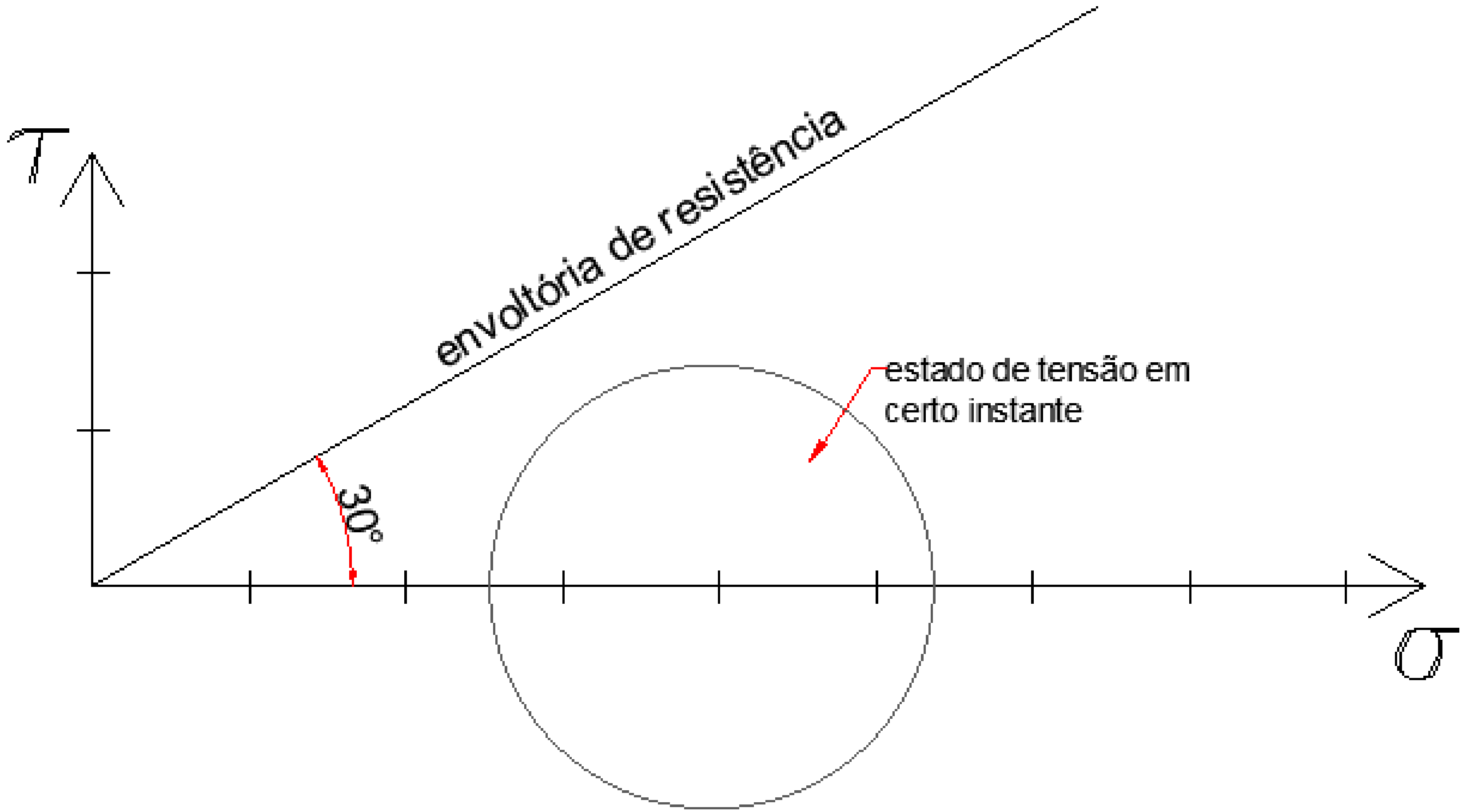
| Ex. 7: Resolução Gráfica

b) Areia com φ'=30º, rompe?

Basta traçar a envoltória de resistência e verificar se cruza o círculo de Mohr

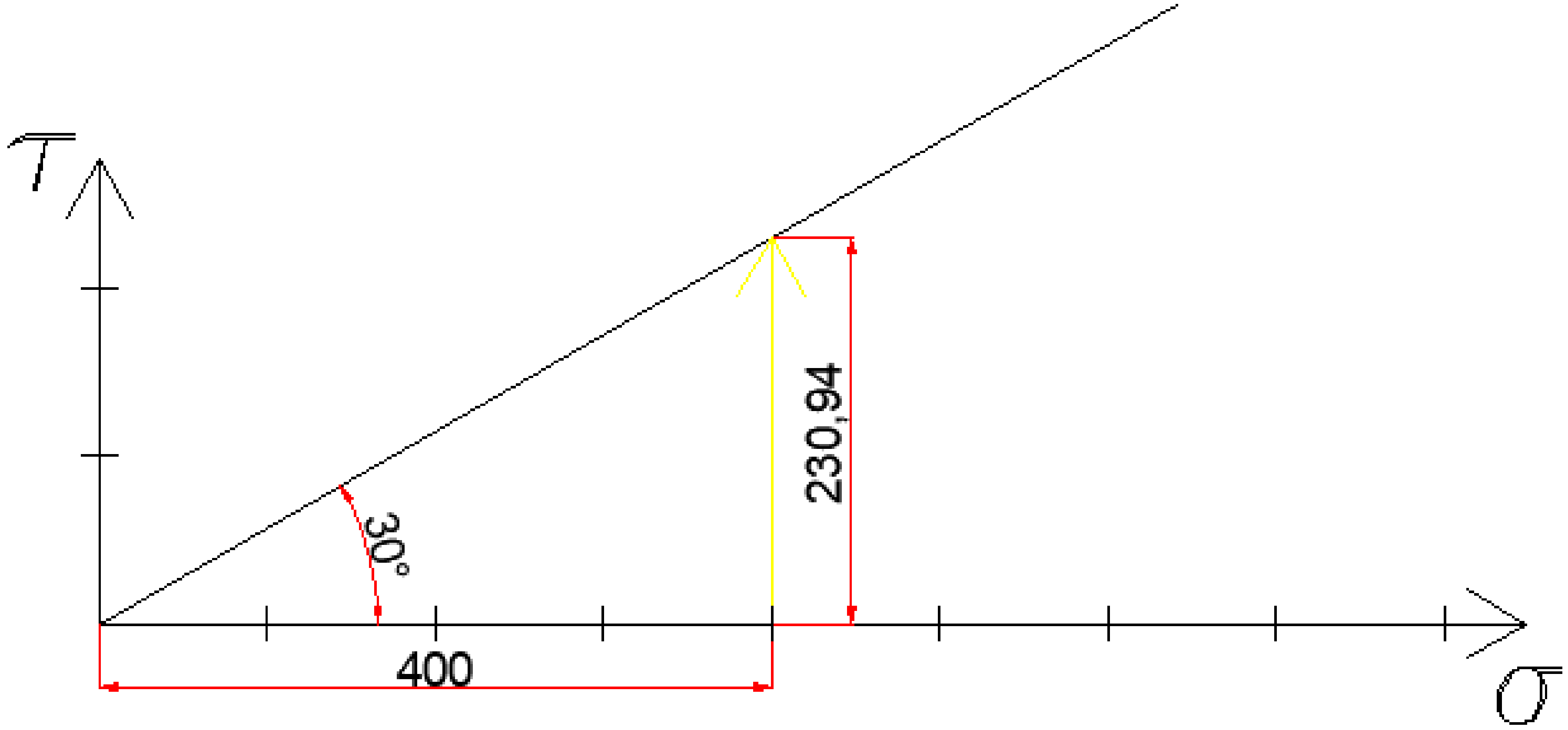
| Ex. 7: Resolução Gráfica

b) Areia com φ'=30º, rompe?



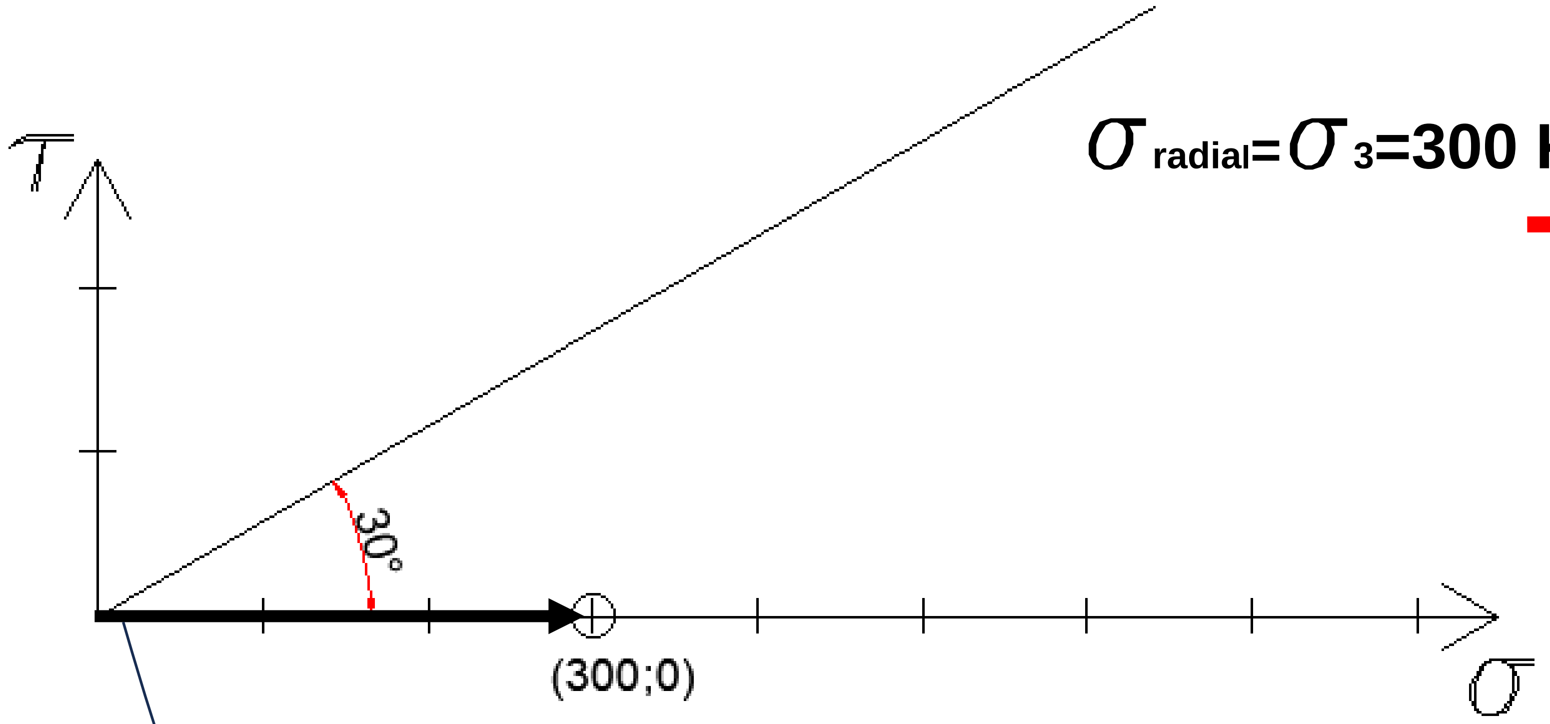
| Ex. 7: Resolução Gráfica

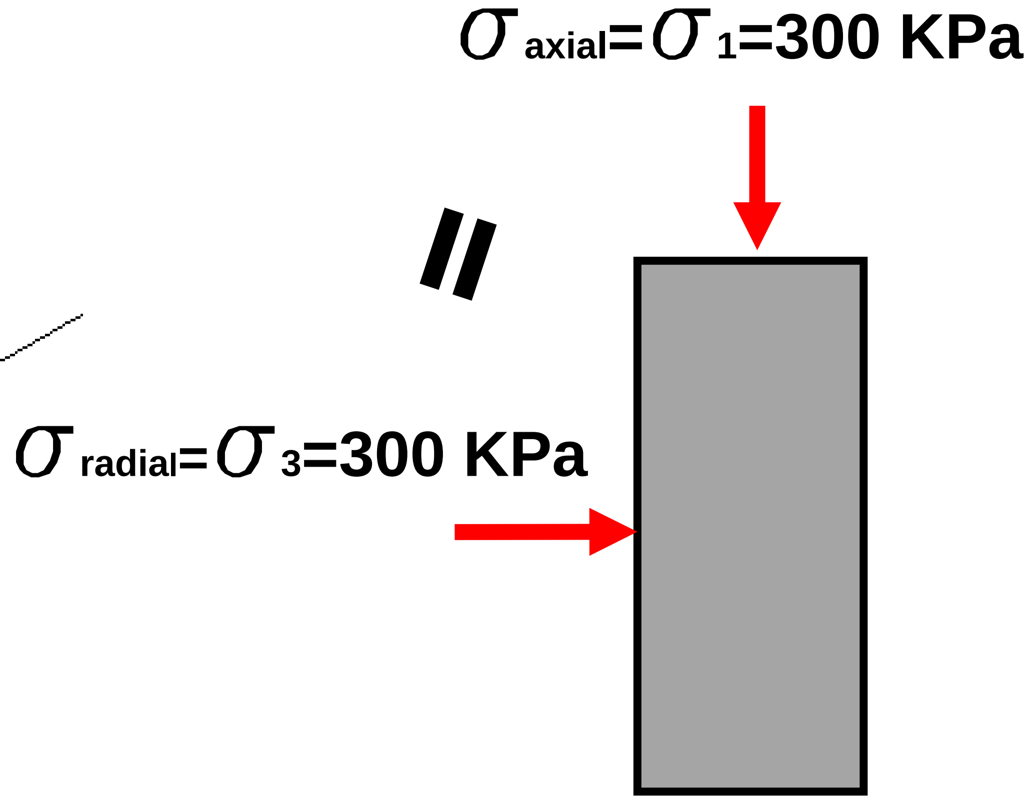
c) Ensaio de cisalhamento direto – qual τ_{rup} para σ=400KPa



| Ex. 7: Resolução Gráfica

d) Ensaio triaxial drenado – início



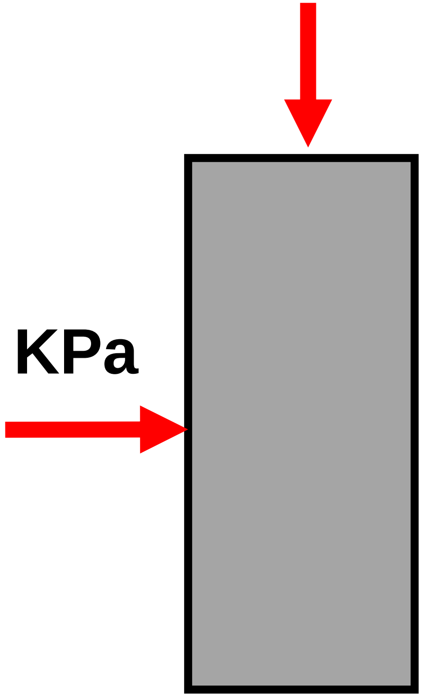


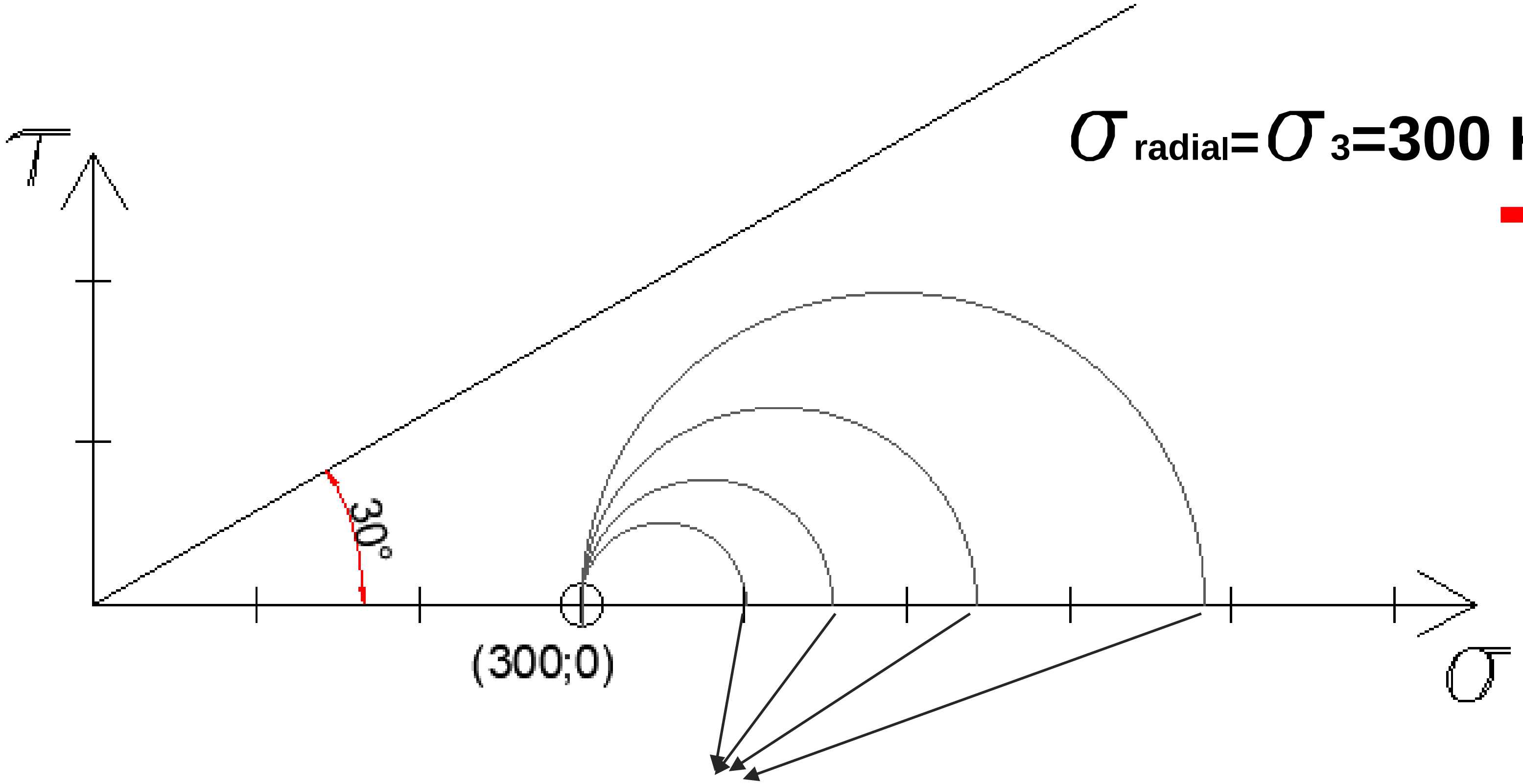
carregamento hidrostático (tensões iguais)

d) Ensaio triaxial drenado – aplicação da tensão desviadora

$\sigma_{axial} = \sigma_1 = 300 + \Delta\sigma$

$\sigma_{radial} = \sigma_3 = 300$ **KPa**



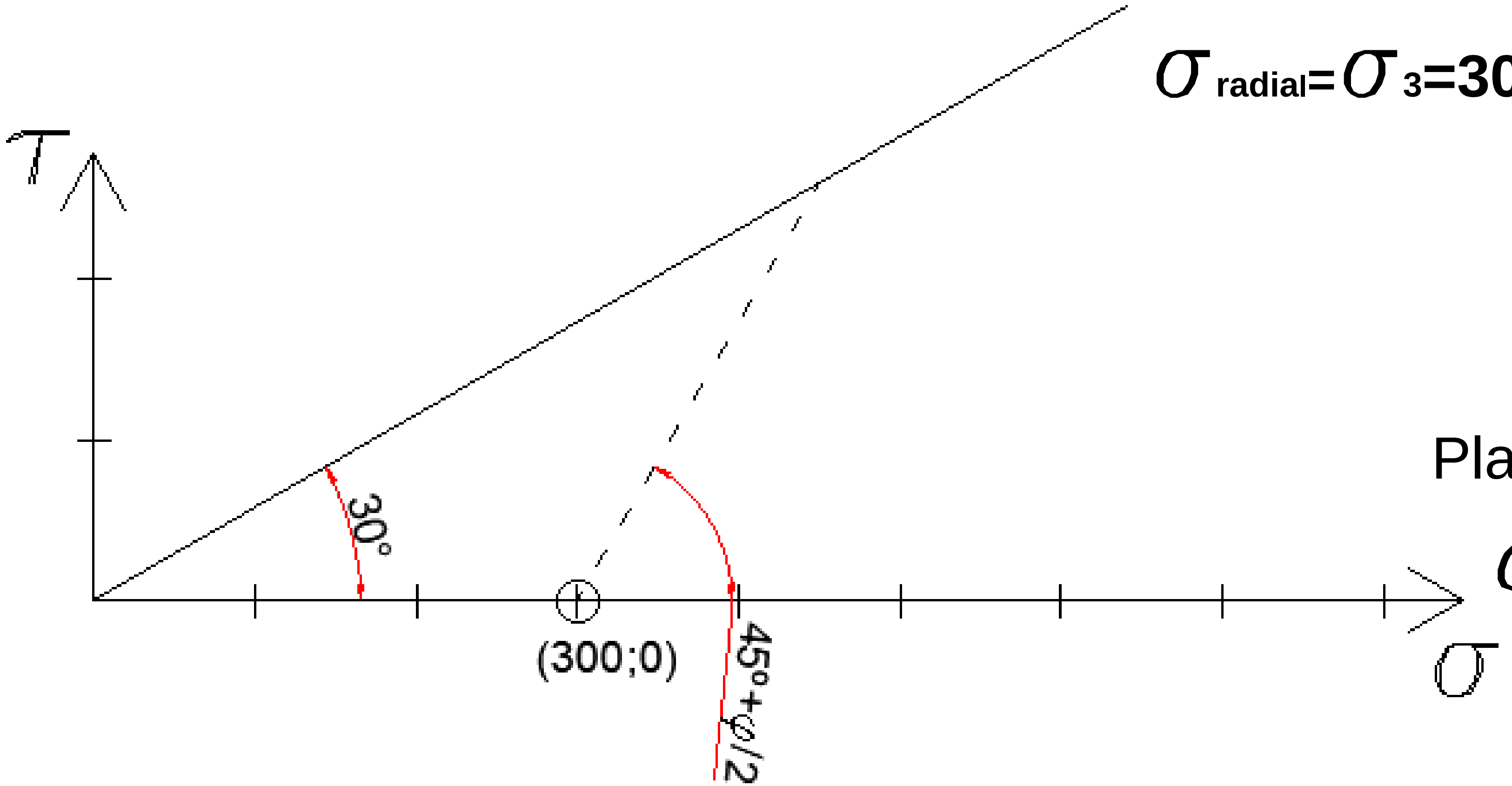


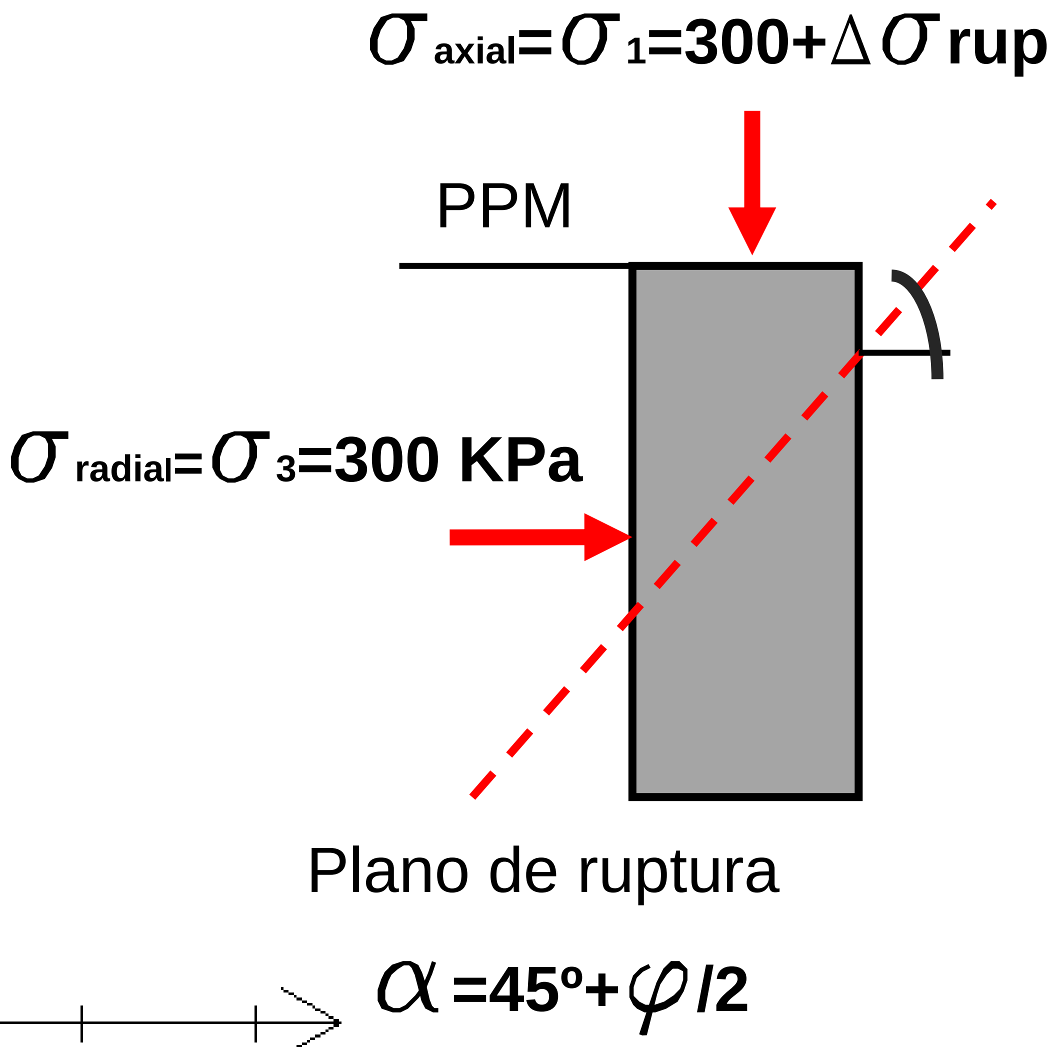
$\sigma_1 = 300 + \Delta\sigma$ em vários instantes até a ruptura

| Ex. 7: Resolução Gráfica

d) Ensaio triaxial drenado – ruptura

Passo 1: Traçar o plano de ruptura a partir do POLO (em σ_3)

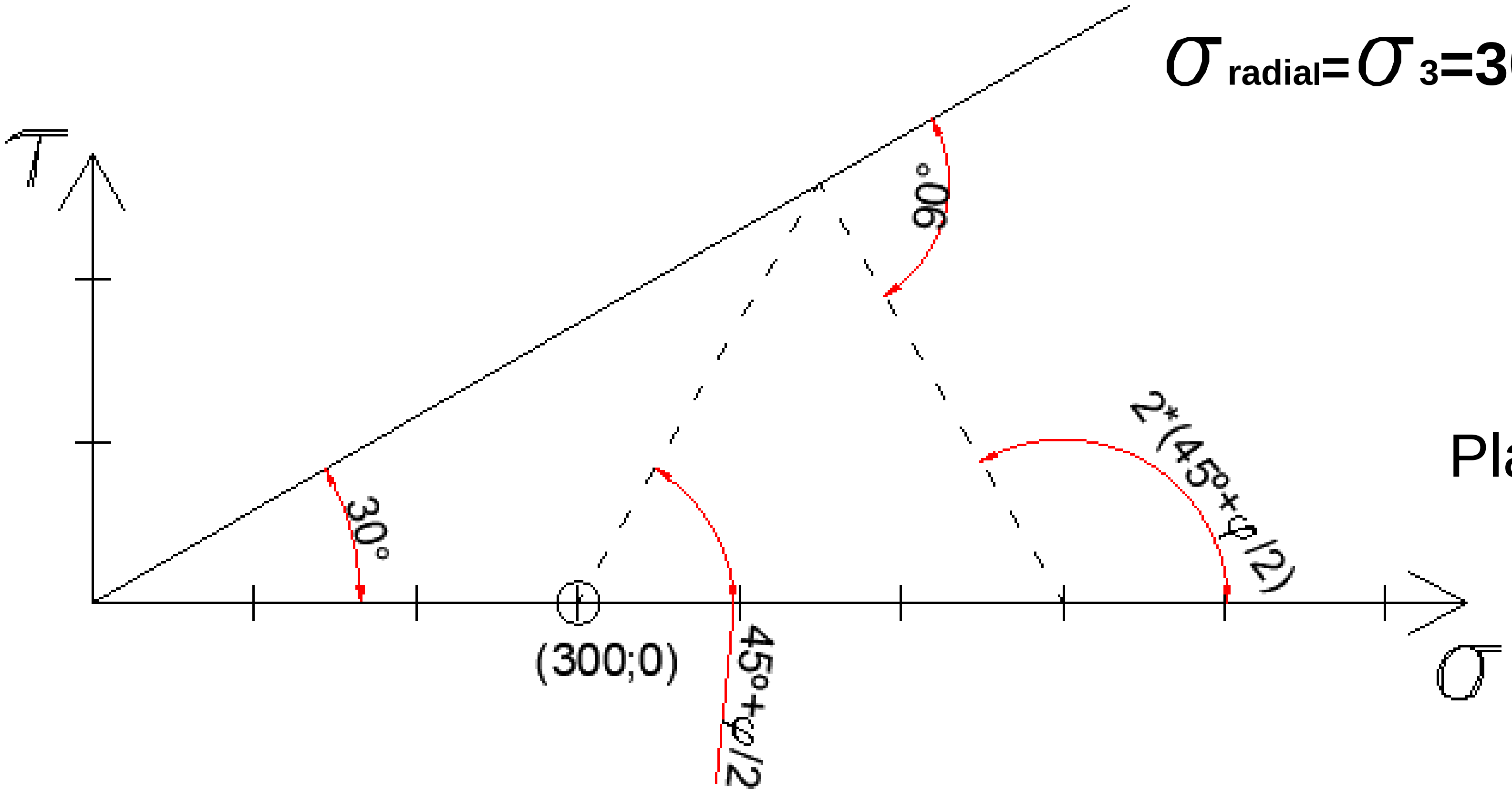




| Ex. 7: Resolução Gráfica

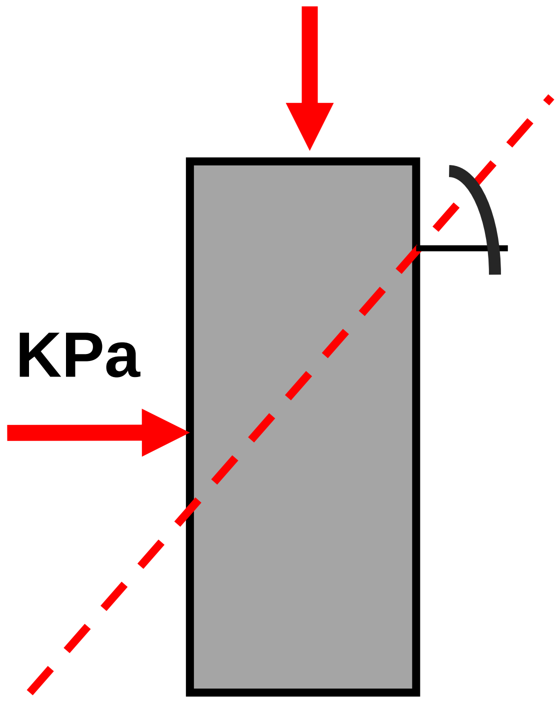
d) Ensaio triaxial drenado – ruptura

Passo 2: Encontrar o centro do círculo



$\sigma_{axial} = \sigma_1 = 300 + \Delta\sigma_{rup}$

$\sigma_{radial} = \sigma_3 = 300$ KPa



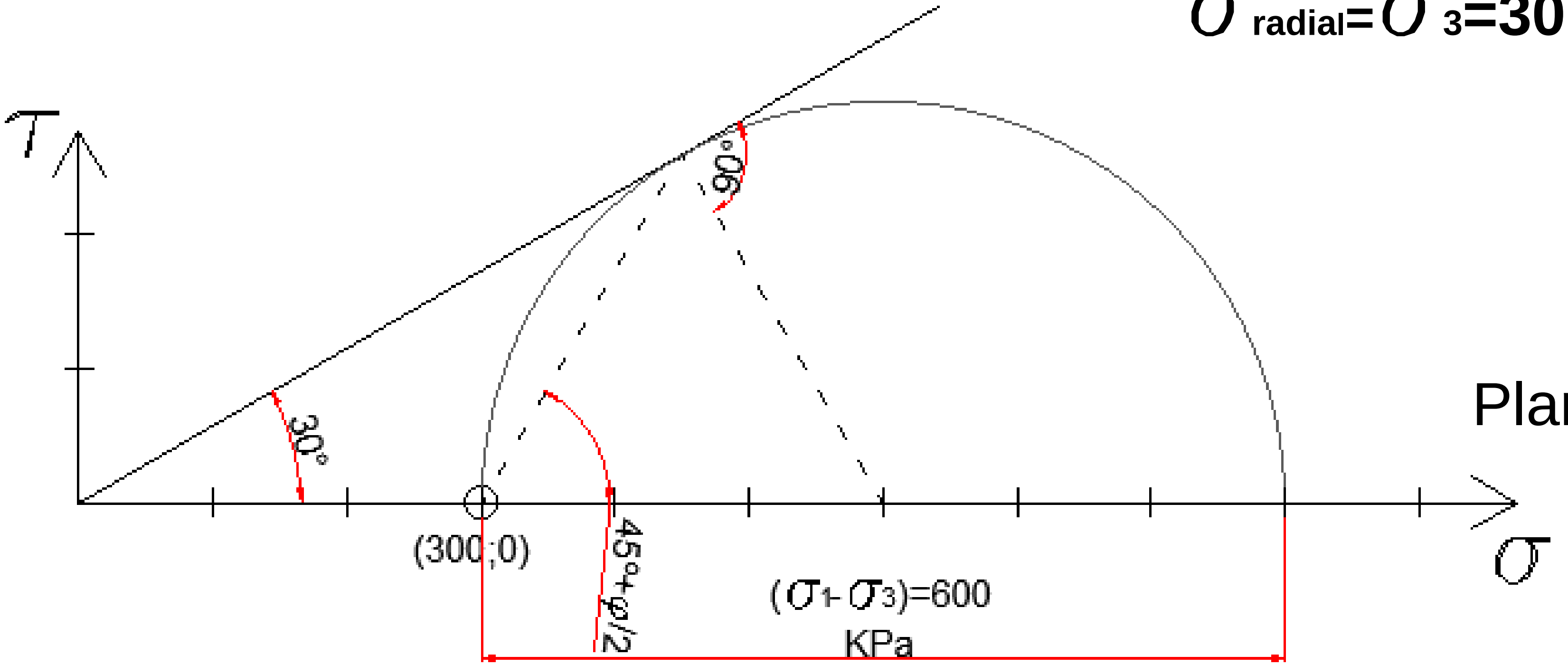
Plano de ruptura

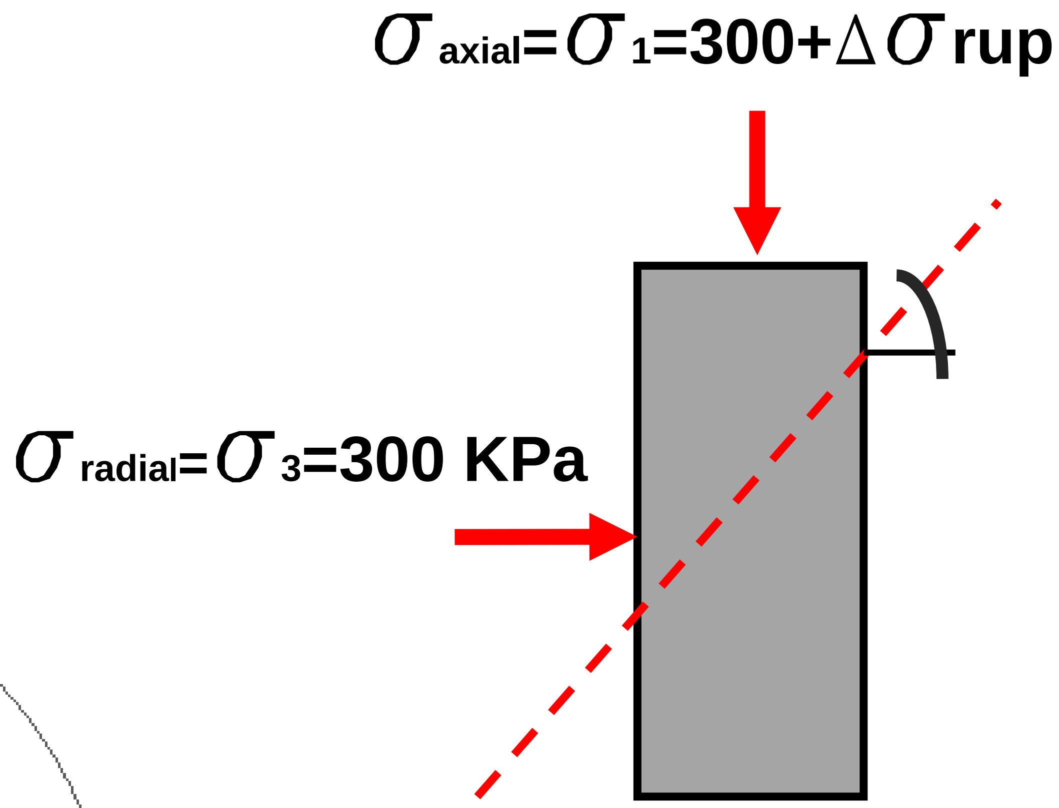
$\alpha = 45° + \varphi/2$

| Ex. 7: Resolução Gráfica

d) Ensaio triaxial drenado – ruptura

Passo 3: Traçar o círculo de Mohr e encontrar as tensões principais





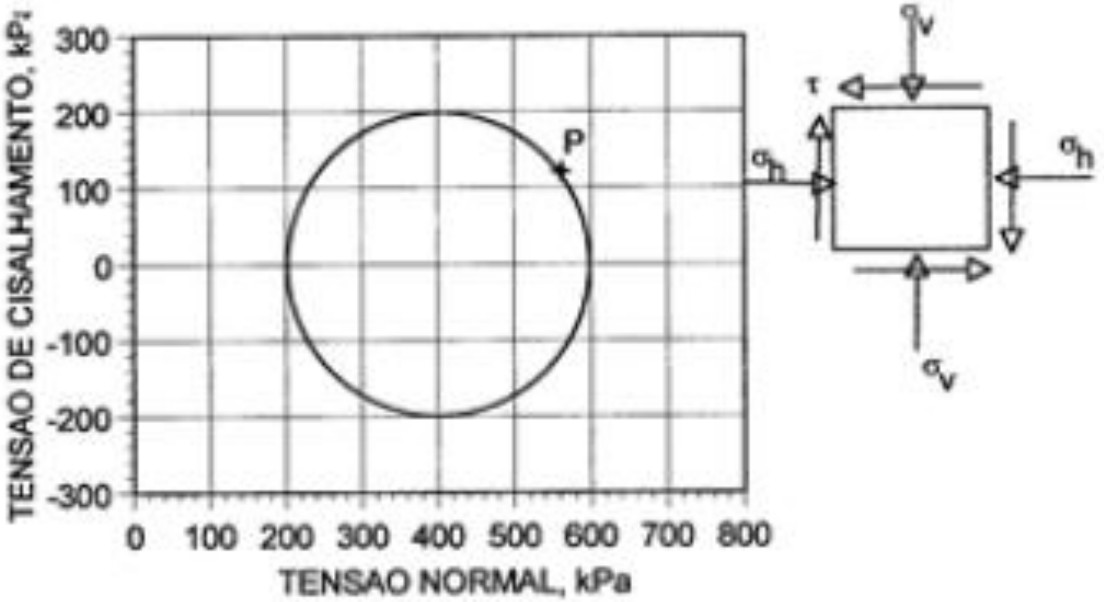
Plano de ruptura

$\alpha = 45° + \varphi/2$

| Ex. 9

9ª. Questão.

Para o elemento abaixo foi construído o círculo de Mohr, estando também indicada a posição do polo.



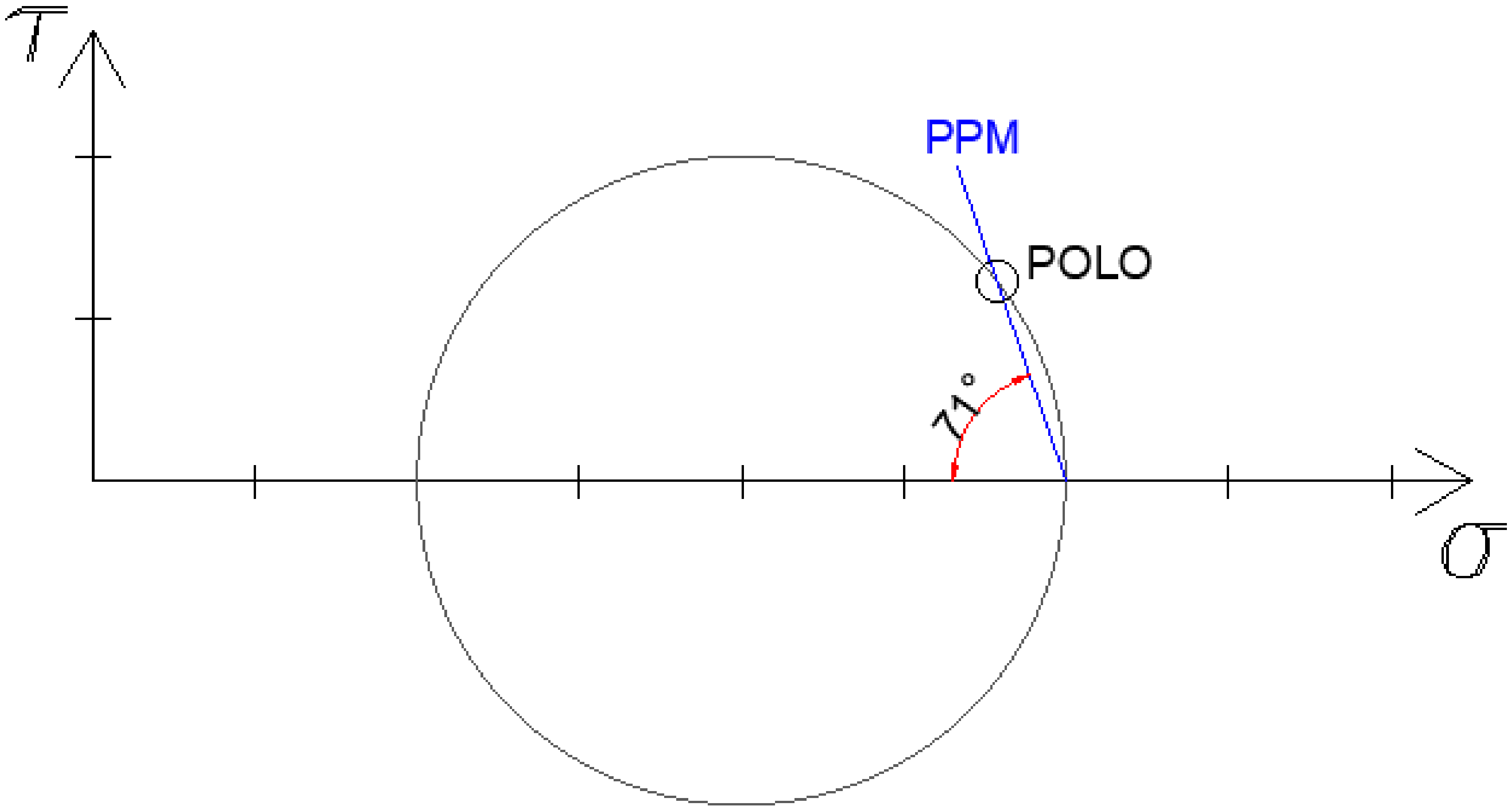
a) Quais são os valores das tensões σ_V, σ_H e τ indicadas no elemento? As setas estão indicadas nos sentidos corretos?

b) Sabendo-se que o solo é uma areia e que para o estado de tensões indicado pelo círculo de Mohr, ocorreu a ruptura, pede:

b.1) Qual o ângulo de atrito dessa areia.
b.2) Indique no elemento em que plano está ocorrendo a ruptura.
b.3) O que você pode afirmar a respeito da compacidade dessa areia?

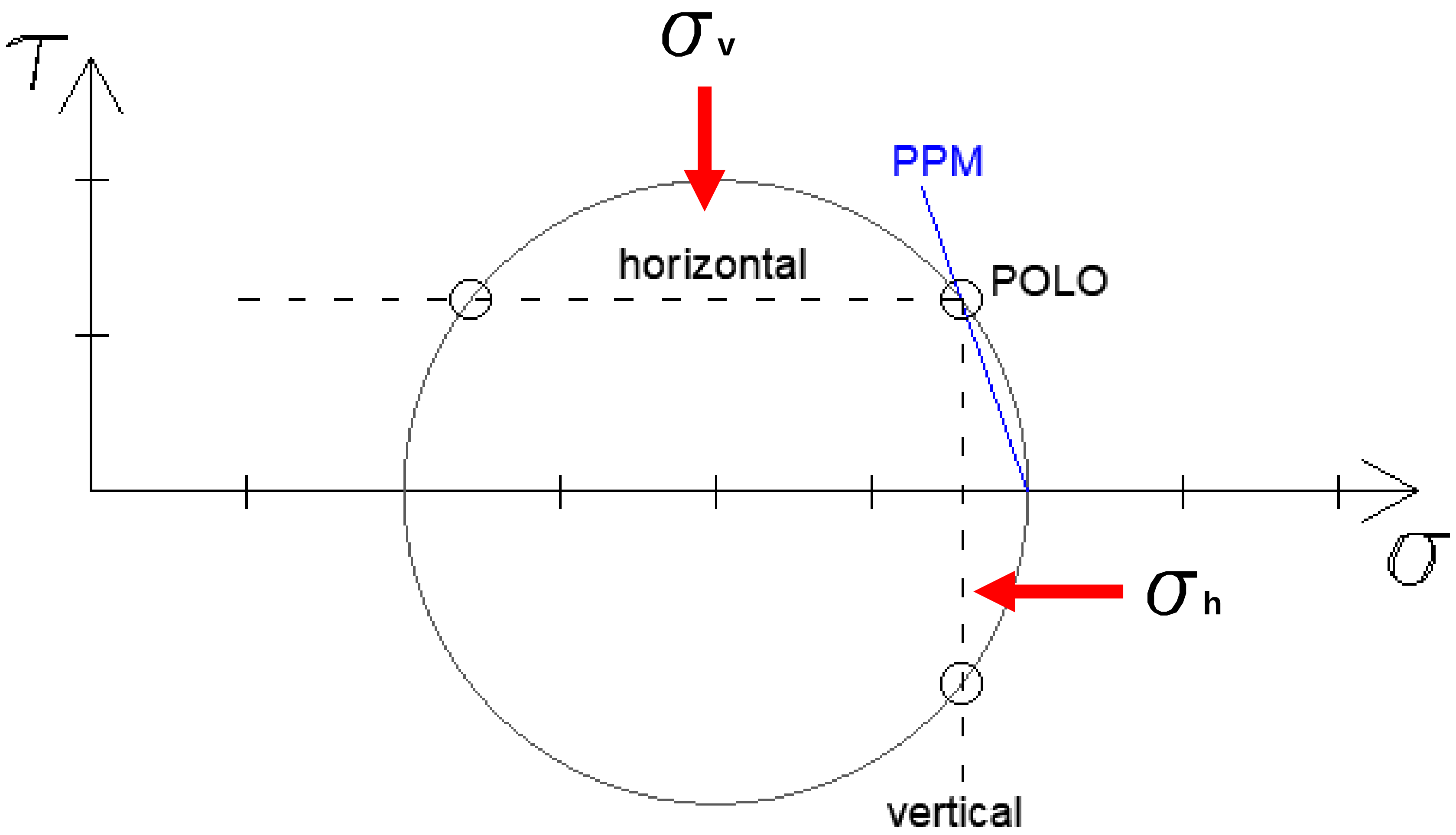
| Ex. 9: Resolução Gráfica

a) Determinar as tensões nos planos horizontal e vertical



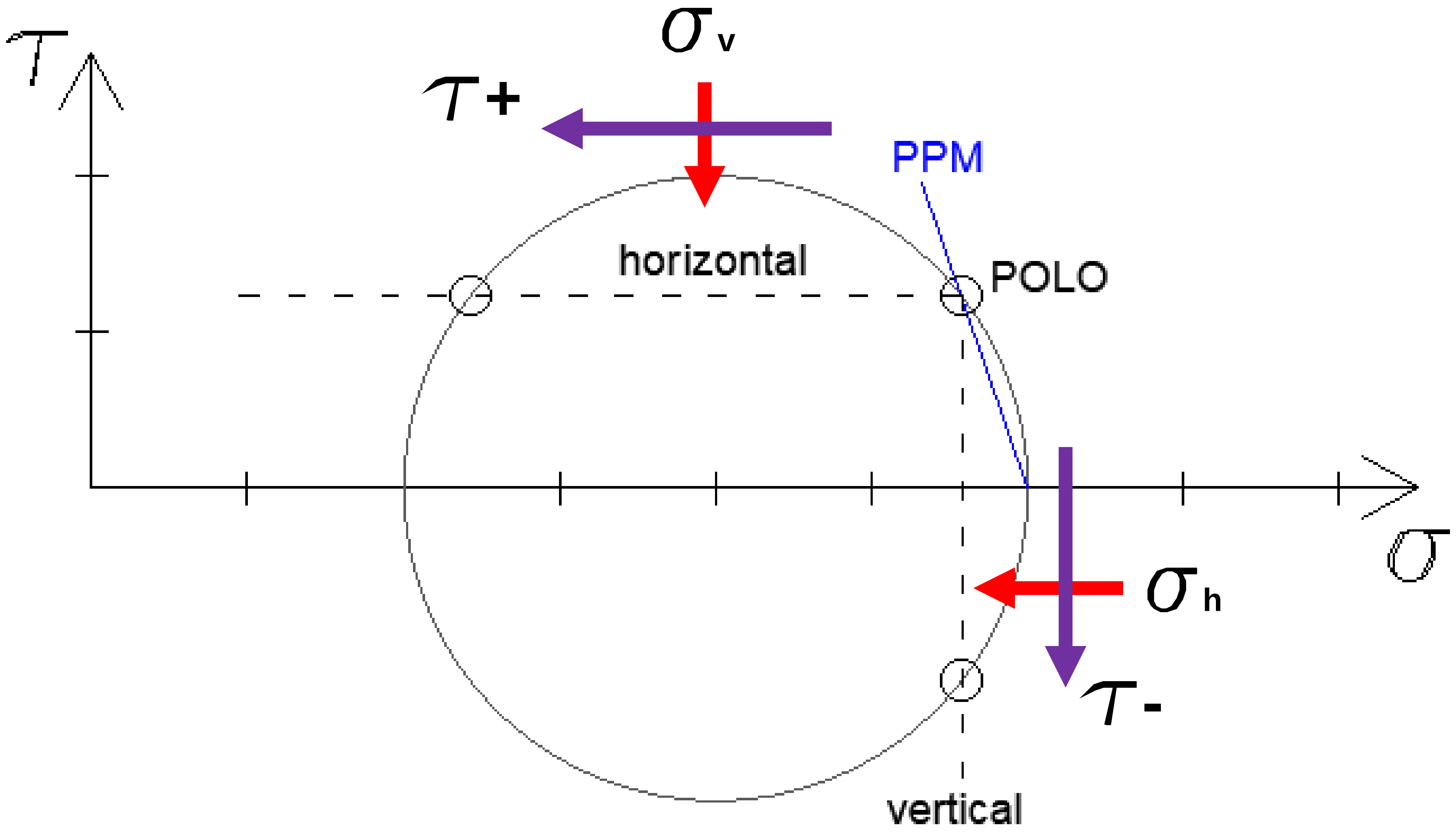
| Ex. 9: Resolução Gráfica

a) Passo 1: Traçar os planos a partir do POLO



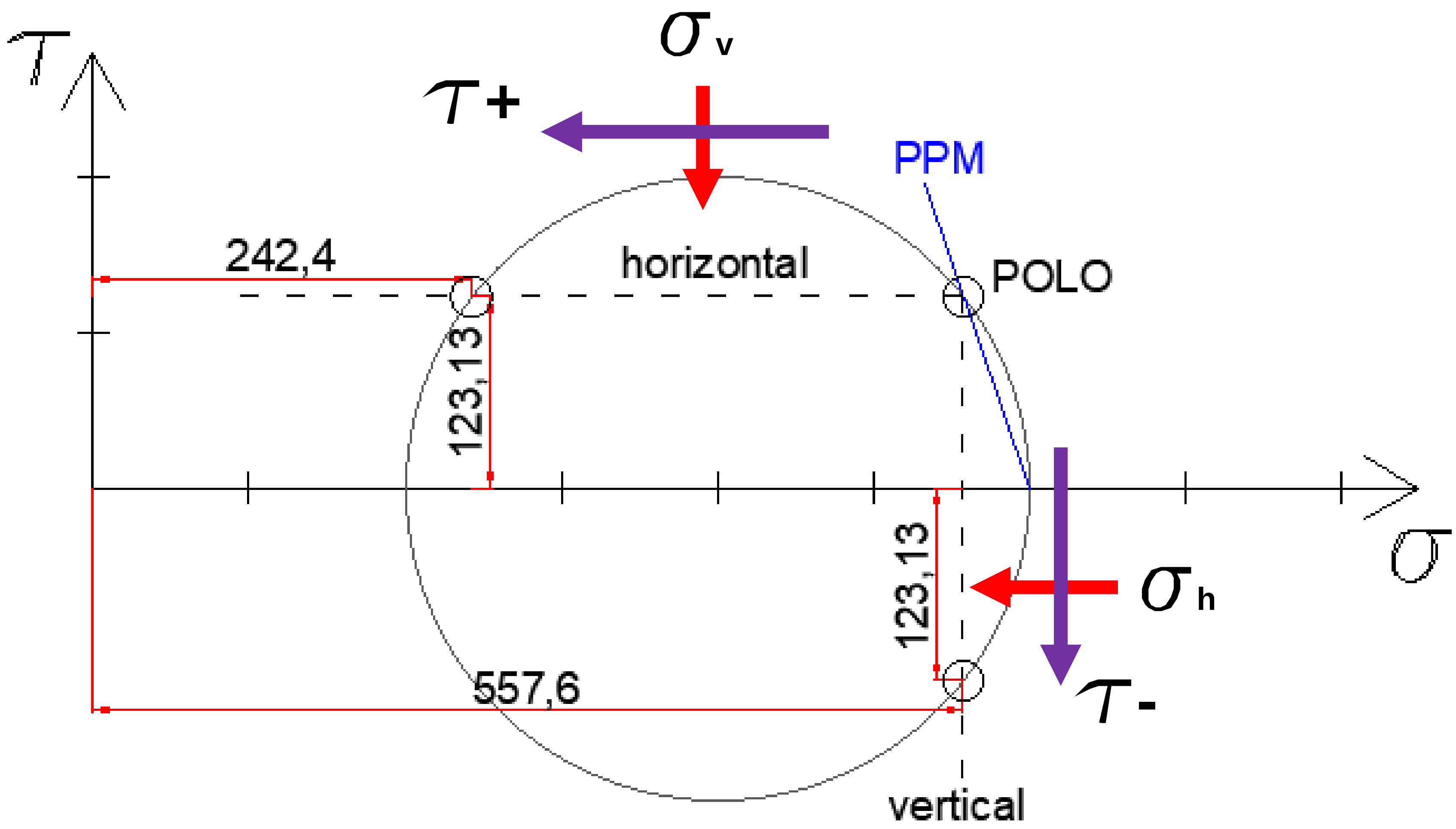
| Ex. 9: Resolução Gráfica

a) Passo 2: Sentido das tensões de cisalhamento



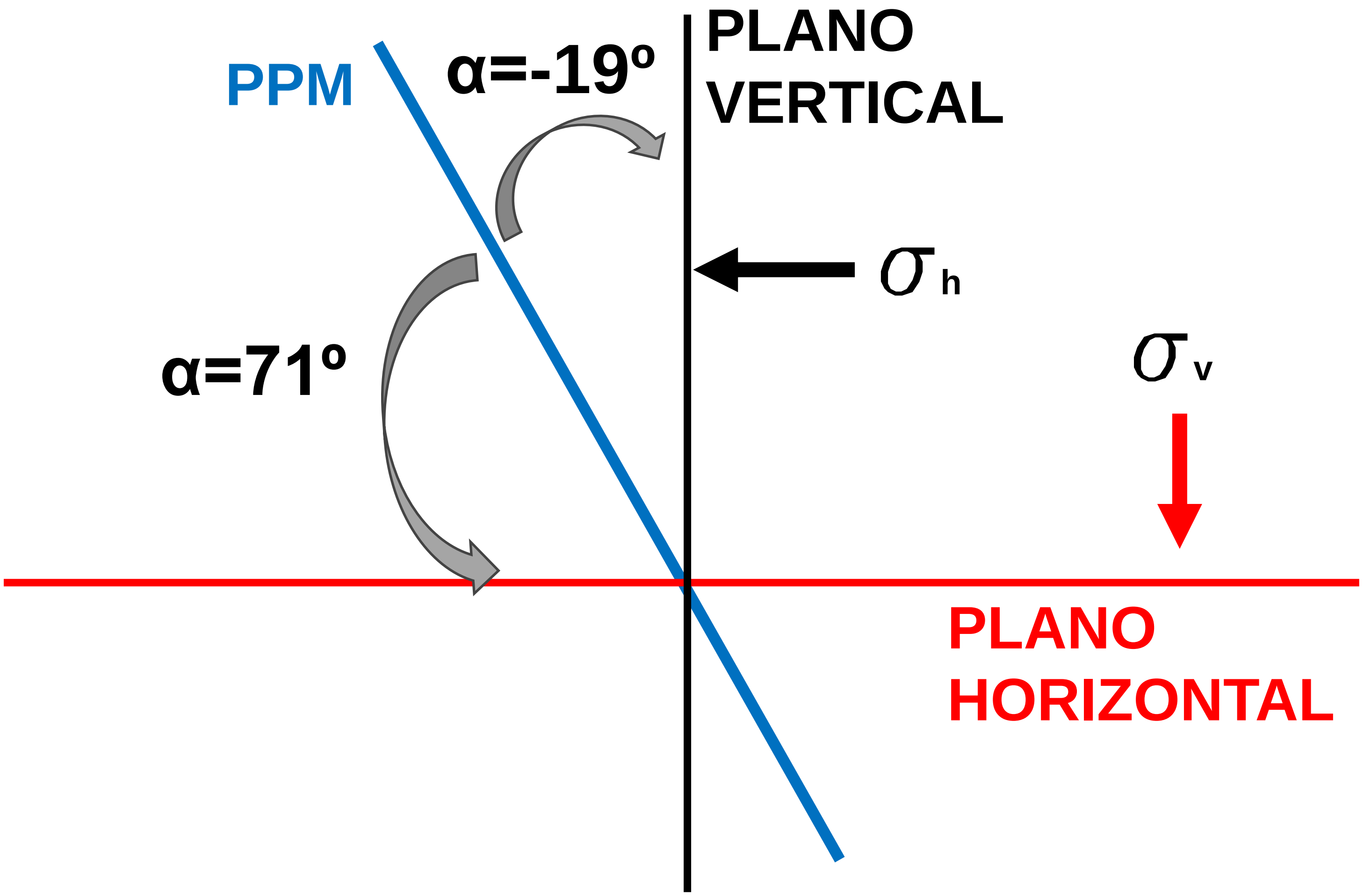
| Ex. 9: Resolução Gráfica

a) Passo 3: Encontrar os valores no gráfico



| Ex. 9: Resolução Analítica

a) Do exercício é conhecido o POLO. Assim é possível obter o ângulo formado com os planos horizontais e verticais.



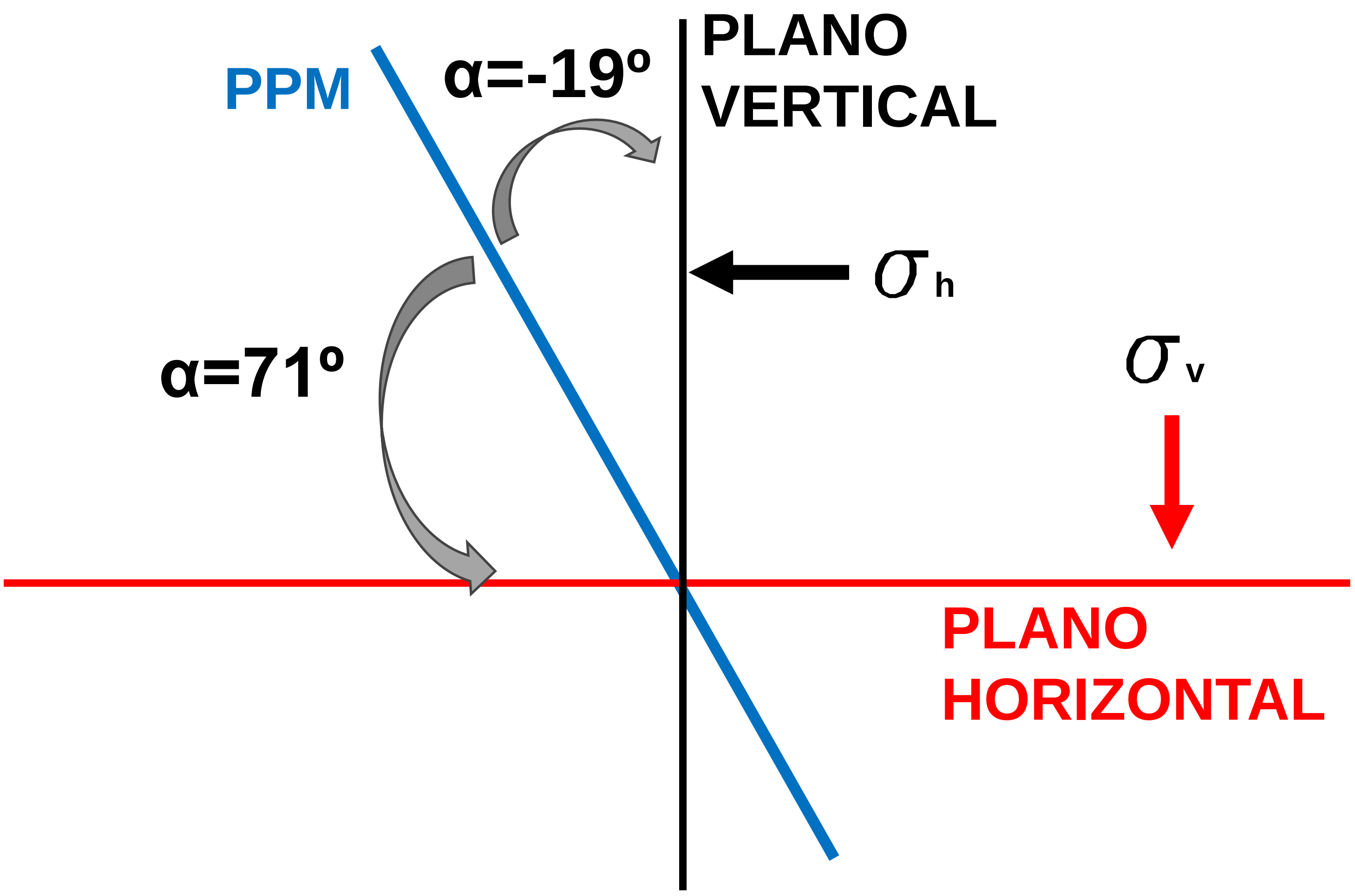
Do exercício, também são conhecidos:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 400\ KPa$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -200\ KPa$$

| Ex. 9: Resolução Analítica

a)



Aplicando as equações, tem-se

No plano horizontal:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha$$

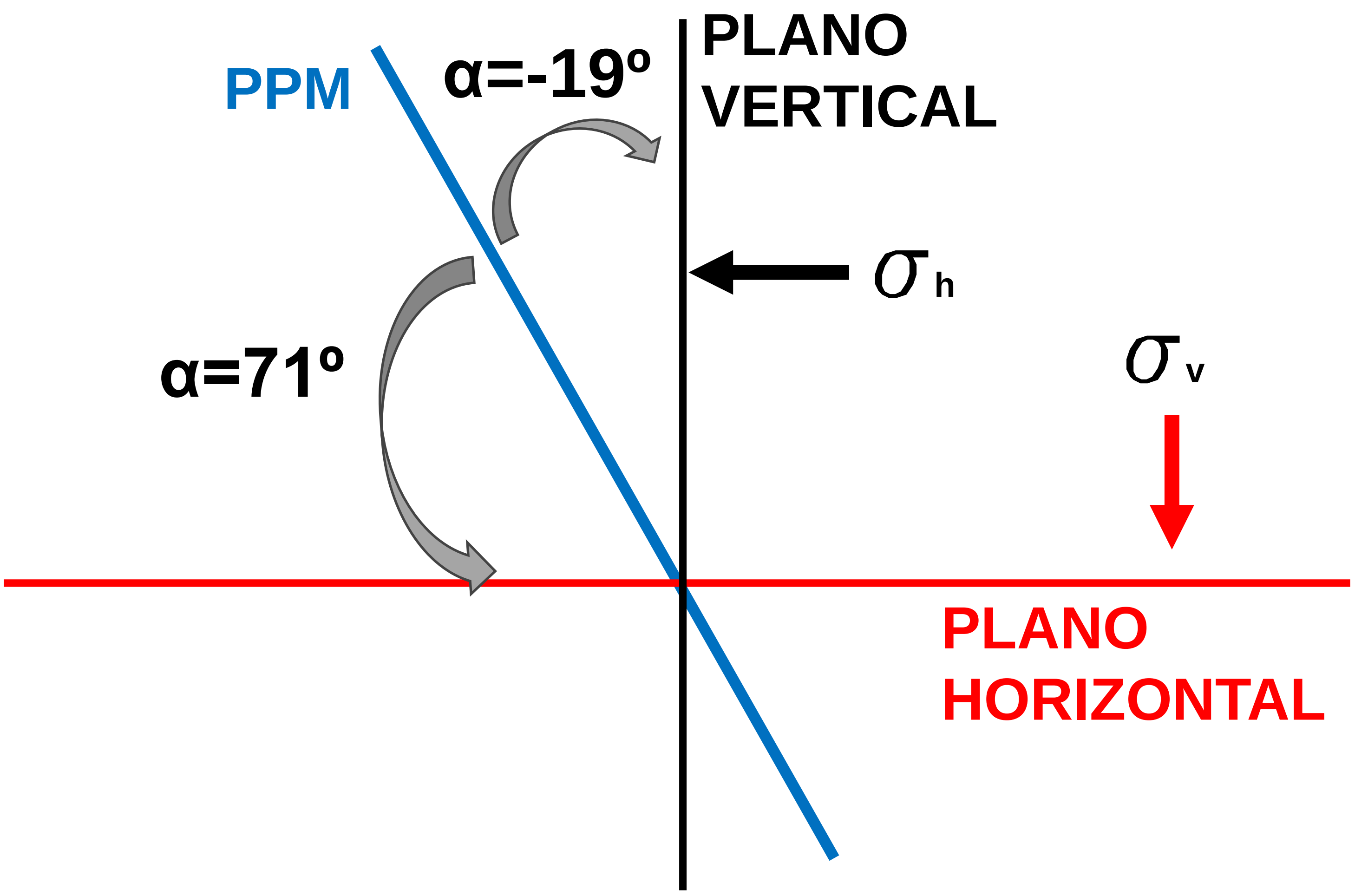
$$= 400 + 200 \cos 142º = 242{,}4\ KPa$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \operatorname{sen} 2\alpha =$$

$$200 \operatorname{sen} 142º = 123{,}1\ KPa$$

| Ex. 9: Resolução Analítica

a)



Aplicando as equações, tem-se

No plano vertical:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha$$
$$= 400 + 200 \cos -38º = 557{,}6\ KPa$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \operatorname{sen} 2\alpha =$$
$$200 \operatorname{sen} -38º = -123{,}1\ KPa$$