PLANTÃO DE DÚVIDAS (23/08)

LISTA 1

7)

b) $$\begin{cases} x + y + az = a + b + 1 \\ 2x + 3y + az = 3a + 2b + 1 \\ x + y + 2az = 2b + 2 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+b+1 \\ 2 & 3 & a & 3a+2b+1 \\ 1 & 1 & 2a & 2b+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & a & a+b+1 \\ 0 & \underline{1} & -a & a-1 \\ 0 & 0 & a & \underline{-a+b+1} \end{array}\right).$$

$L_2' := L_2 - 2L_1$

$L_3' := L_3 - L_1$

PRIMEIRO CASO: $a \neq 0$.

Nesse caso, cada linha da matriz escalonada possui pivô, e, portanto, o sistema linear possui uma única solução.

$$\left[\begin{cases} x + y + az = a + b + 1 \\ y - az = a - 1 \\ az = -a + b + 1 \end{cases}\right].$$

SEGUNDO CASO: $a = 0$.

Nesse caso, o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y = b + 1 \\ y = -1 \\ 0 = b + 1 \end{cases}.$$

Logo, se $b \neq -1$, o sistema é impossível, e, se $b=-1$, o sistema possui infinitas soluções.

(Nesse caso, o conjunto solução é

$$\{(1,-1,z) : z \in \mathbb{R}\}.)$$

RESUMO:

- se $a \neq 0$, o sistema tem solução única;

- se $a = 0$, e se $b \neq -1$, o sistema é impossível.

- se $a = 0$, e se $b = -1$, o sistema tem infinitas soluções.

LISTA 2

2)

f) Como

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= (A+B)A + (A+B).B$$

$$= A.A + B.A + A.B + B.B$$

$$= A^2 + BA + AB + B^2,$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\Updownarrow$$

$$A^2 + BA + AB + \cancel{B^2} = \cancel{A^2} + \underbrace{2AB}_{= AB + AB} + \cancel{B^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$BA + \cancel{AB} = AB + \cancel{AB}$$

$$\Updownarrow$$

$$AB = BA.$$

c) Em vista do que provamos na página anterior, para mostrarmos que a afirmação é falsa, basta exibirmos matrizes A e B tais que $AB \neq BA$. E, para tanto, é suficiente notarmos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

e que

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

12)

a)

$$A := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

RESULTADO OBTIDO NA RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 11: SE $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ É TAL QUE $ad - bc \neq 0$, ENTÃO A TEM INVERSA, E

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$ad - bc =: \det(A)$.

Se $\det(A) \neq 0$, então A tem inversa, e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

VOLTEMOS AO EXERCÍCIO 12.

RESOLUÇÃO

Como $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0$, A tem inversa, e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta) \\ y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases}.$$

RESOLUÇÃO.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Como B tem inversa,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\, x + \operatorname{sen}(\theta)\, y \\ -\operatorname{sen}(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)\, x + \operatorname{sen}(\theta)\, y \\ y' = -\operatorname{sen}(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y \end{cases}.$$