A INTEGRAL DE RIEMANN EM DUAS VARIÁVEIS

1. Integral em retângulos

2. Conceitos básicos de topologia no plano

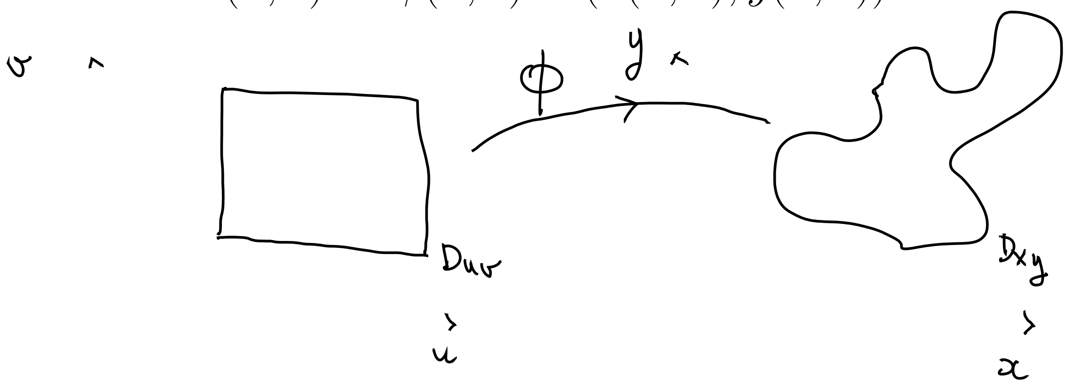
3. Integral em domínios limitados do plano

4. Mudança de variáveis na integral dupla

A exemplo do caso unidimensional, é frequentemente útil utilizar "mudança de variáveis" para facilitar o cálculo de integrais duplas. Em muitas situações isso permite simplificar a expressão da função ou a forma do domínio (ou ambas).

Chamaremos de **transformação** (ou mudança de variáveis) uma aplicação

$$\phi : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$



Date: August 23, 2023.

A transformação ϕ é contínua, de classe $\mathcal{C}^1$, etc se as *funções coordenadas* $x(u,v)$ e $y(u,v)$ o forem.

Se ϕ é de classe $\mathcal{C}^1$, podemos definir sua matriz de derivadas, ou *matriz Jacobiana* por

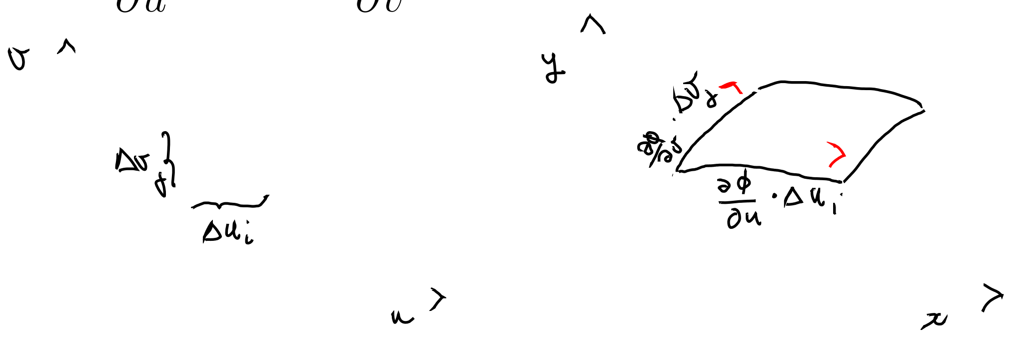
$$D\phi(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

O determinante de $D\phi(u,v)$ é denominado **Jacobiano** da transformação ϕ no ponto (u,v) e denotado por $J\phi(u,v)$ ou $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Suponhamos agora que o domínio D_{uv} tenha fronteira de conteúdo nulo e que ϕ seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ e injetora. Se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição do retângulo $\mathcal{R} \subset D_{uv}$ e R_{ij} é um subretângulo da partição, então o domínio $D_{xy} = \phi(D_{uv})$, fica dividido em subregiões $S_{i,j} = \phi(R_{ij})$.

A área $A(S_{ij})$ pode ser aproximada pela área do paralelogramo definido pelos vetores $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i,v_i)\Delta u_i = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})(u_i,v_i)\Delta u_i$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i,v_i)\Delta v_i = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})(u_i,v_i)\Delta v_i$., ou seja

$$A(S_{ij}) \cong \|\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i,v_i) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i,v_i)\|\Delta u_i \Delta v_j = |J\phi(u,v)|\Delta u_i \Delta v_j$$



Sob "boas condições" esperamos que, para partições suficientemente finas

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy &\cong \sum_{ij} f(x_i,y_j)A(S_{ij} \\
&\cong \sum_{ij} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))A(S_{ij}) \\
&\cong \sum_{ij} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))|J\phi(u_i,v_j)|\Delta u_i \Delta v_j \\
. &\cong \iint_{D_{xy}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J\phi(u,v)|\,dxdy.
\end{aligned}
$$

De fato, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $D_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ domínio limitado com fronteira de conteúdo nulo e $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto contendo D_{uv}, injetora no interior de D e $J\phi(u,v) \neq 0$ para todo (u,v) no interior de D. Nessas condições, se $f(x,y)$ for contínua em $D_{xy} = \phi(D_{uv})$ então*

$$\begin{aligned}\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D_{uv}} f(\phi(u,v))\,|J\phi(u,v)|\,dudv\\ &= \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J\phi(u,v)|\,dudv.\end{aligned}$$

Observação 4.2. *O resultado ainda vale se supusermos apenas que f e $f\circ\phi$ são integráveis em D_{xy} e D_{uv}, respectivamente.*

Exemplo 4.3. *Calcule, usando uma mudança de coordenadas conveniente, a integral $\iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^7}{y-x}\,dxdy$, sendo D_{xy} o domínio limitado pelas retas $y=x+3$, $y=x+1$, $y=-x+3$, $y=-x+4$.*

4.1. **Coordenadas polares.** Uma mudança de coordenadas especialmente útil em muitos casos é dada pela transformação $\phi:(r,\theta)\mapsto(x(r,\theta),y(r,\theta))$, sendo

$$\begin{cases} x(r,\theta)=r\,\mathrm{sen}\,(\theta)\\ y(r,\theta)=r\cos(\theta)\end{cases}$$

Se $\Omega=[0,2\pi]\times\mathbb{R}^+$ então ϕ é injetora em $\overset{\circ}{\Omega}$ e

$$J\phi=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}\,(\theta)\\ \mathrm{sen}\,(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix}\ \text{em}\ \overset{\circ}{\Omega}\,.$$

Devido ao significado geométrico da transformação ϕ podemos, em muitos casos de interesse, identificar o domínio D_{uv} cuja imagem por ϕ é o domínio de integração D_{xy} e o primeiro resulta ser mais conveniente para a integração.

Exemplo 4.4. *(Lista 1 - Ex9)*

(1) $\iint_R x\,dxdy$, *onde* R *é o disco de centro na origem e raio* 5.
(2) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, *onde* R *é a região interior à cardioide* $r = 1+\sin\theta$ *e exterior à circunferência* $r = 1$.