

Introdução ao Biomagnetismo

Oswaldo Baffa Filho
Departamento de Física-FFCLRP
Universidade São Paulo
Aula #4- Problema Inverso

Esse material se destina a uso interno e educacional e não deve ser compartilhado. Fica proibida a sua distribuição sob qualquer forma, assim como a postagem em redes sociais, em sites da internet, e equivalentes.

Oleg Mikailivitch Alifanov

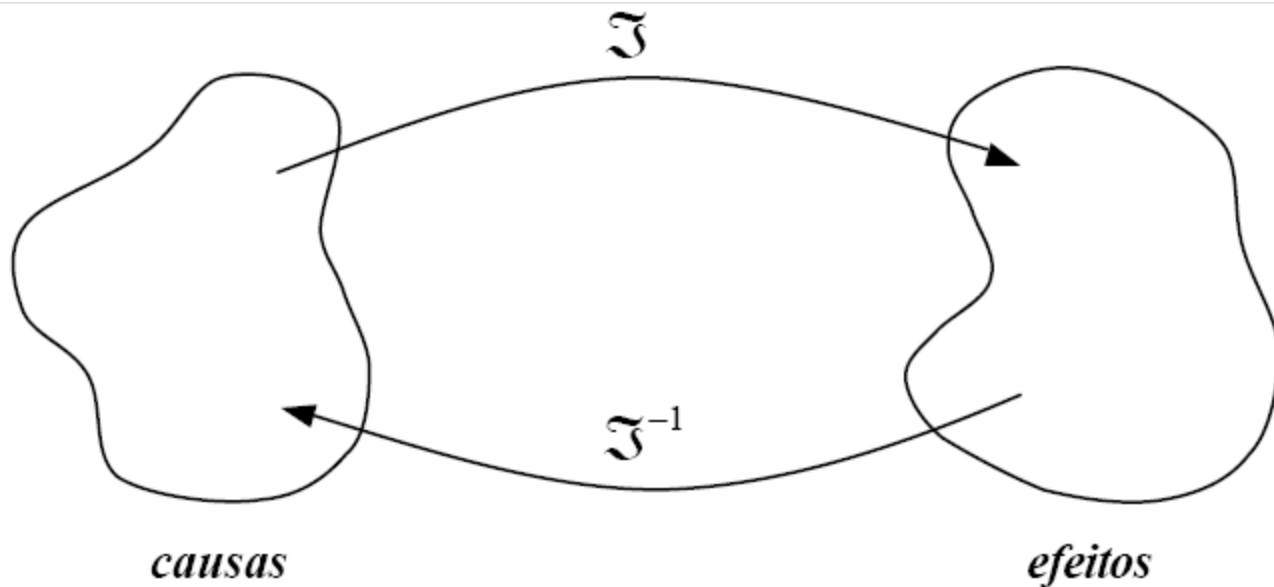
(www.me.ua.edu/inverse/whatis.html)

- Definição: “A solução de um problema inverso consiste em determinar causas baseado na observação dos seus efeitos”.
- $A(u) = f$, o modelo inverso pode ser representado por: $A^{-1}(f) = u$. Por outro lado, definindo-se $B \equiv A^{-1}$, o par problema direto-inverso torna-se: $B(f) = u \rightarrow B^{-1}(u) = f!$

Engl et al. (1996)

□ “Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados”

Representação esquemática de problemas direto e inverso



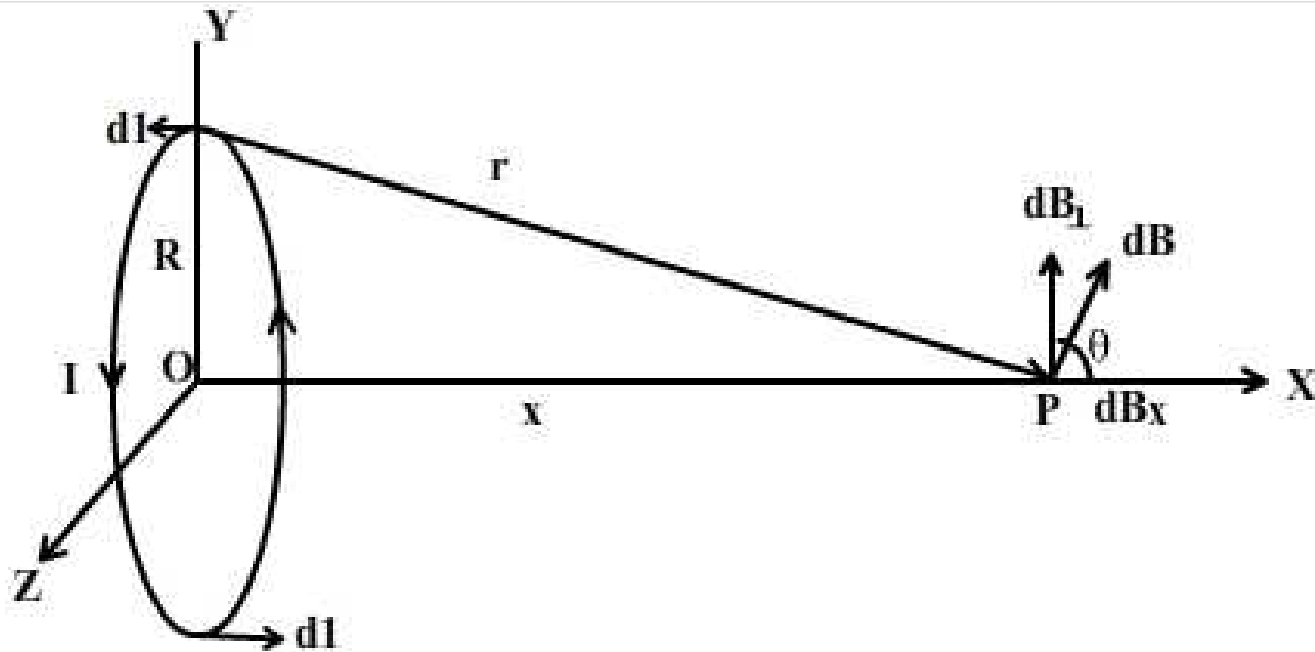
M \equiv espaço de parâmetros ou modelos

D \equiv espaço de dados ou observações

\mathfrak{S} \equiv modelo direto

\mathfrak{S}^{-1} \equiv modelo inverso

Exemplos de Problema Direto



Problemas mal-postos

- Matematicamente problemas inversos pertencem à classe de problemas mal-postos. No início deste século o matemático francês Jacques Hadamard definiu um problema bem posto como sendo aquele que cumpre as três condições abaixo:
 - (i) Existe solução;
 - (ii) A solução é única;
 - (iii) A solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Exemplos

- Considere a solução da equação do 1º grau: $2x - 4 = 0$ o problema (direto) algébrico acima tem solução única: $x=2$. *O problema algébrico inverso $ax + b = 0$, com $x=2$, não apresenta solução única.*

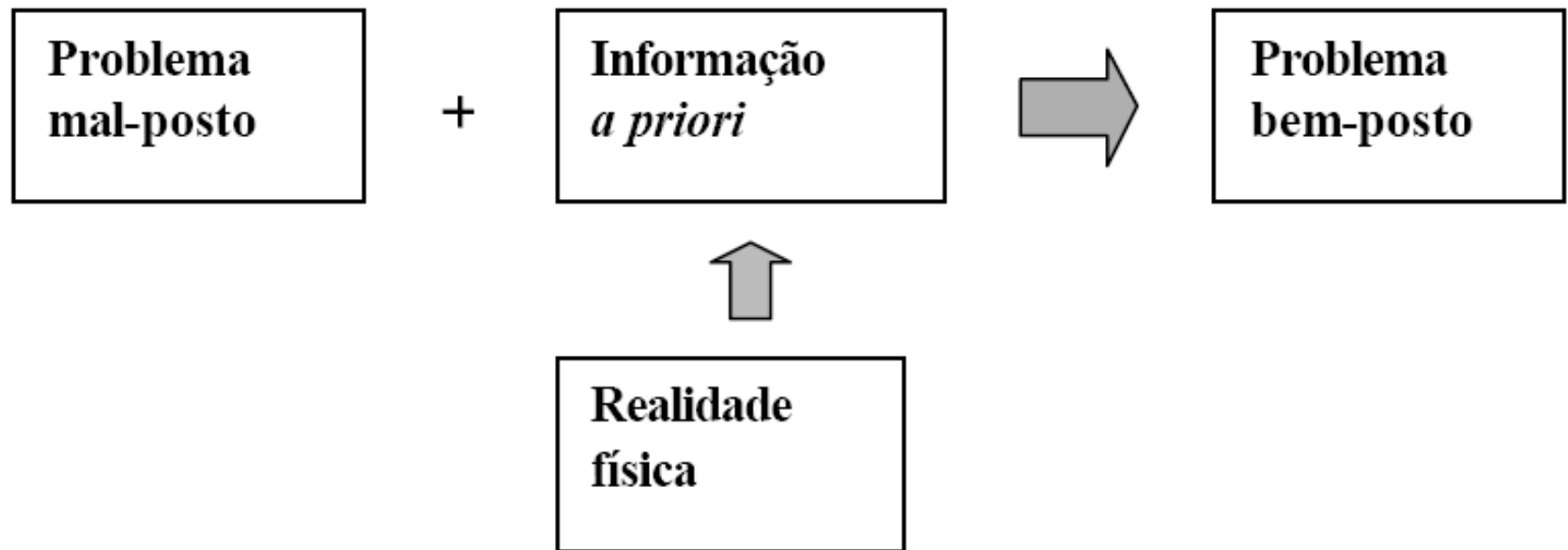
O problema de estabilidade é exemplificado pela Equação algébrica

- $ax^2 - 2x + 1 = 0$, para $a=1$, possui as seguintes soluções: $x_1 = x_2 = 1$.
Introduzindo um erro de 1% no coeficiente a , isto é, $a = 1,01$ – a solução torna-se: $x_{1,2} = 1 \pm 0,1i$, sendo i a unidade dos números imaginários. Ou seja, com 1% de ruído no parâmetro a , a equação não tem mais solução no campo dos números reais!

MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS

- ❑ Inversão direta;
- ❑ Decomposição em valores singulares;
- ❑ Mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados);
- ❑ Métodos de regularização;
- ❑ Métodos variacionais;
- ❑ Outros (Bayesianos, filtros digitais, redes neurais, etc).

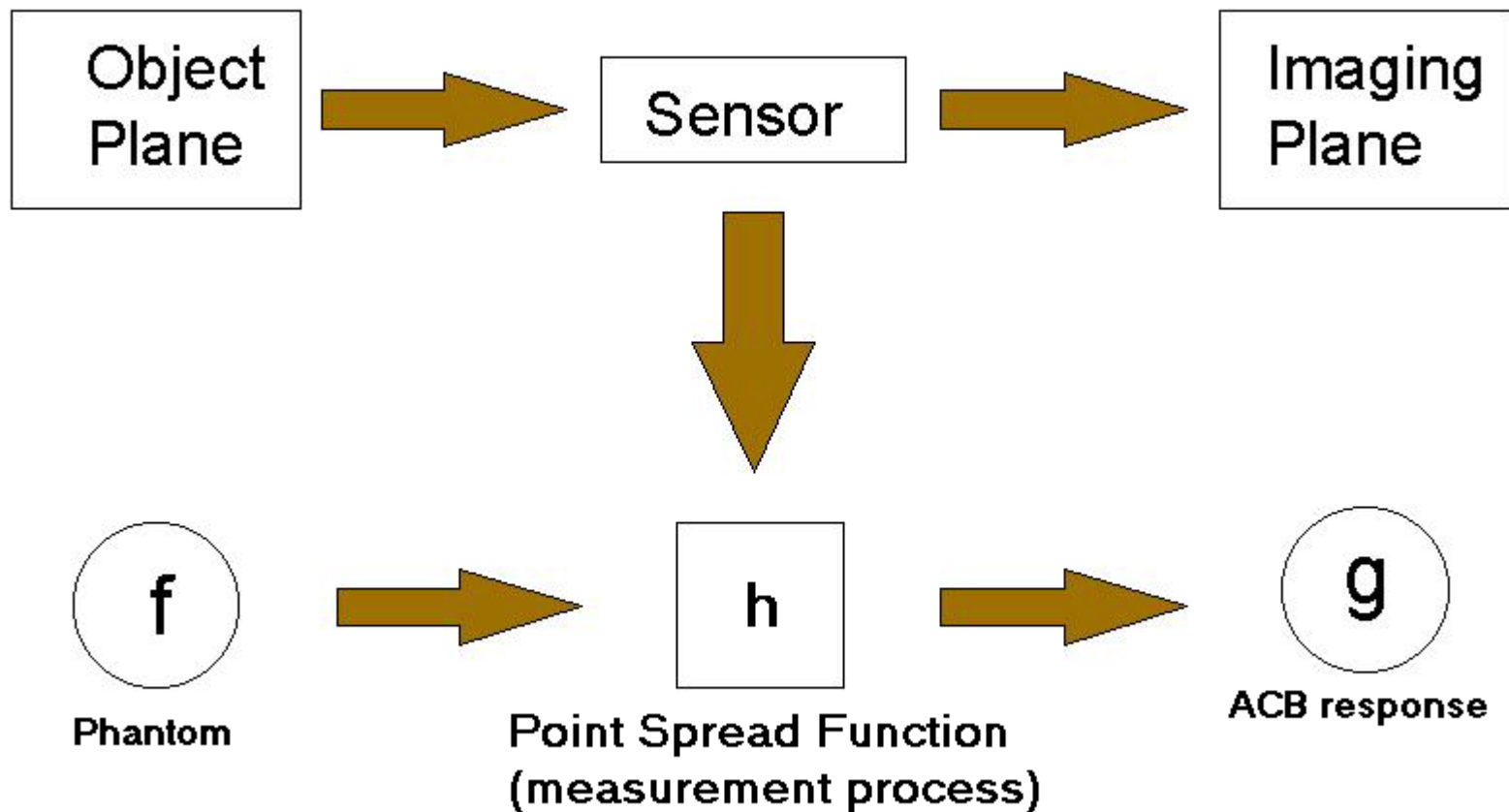
Idéia básica do método da regularização



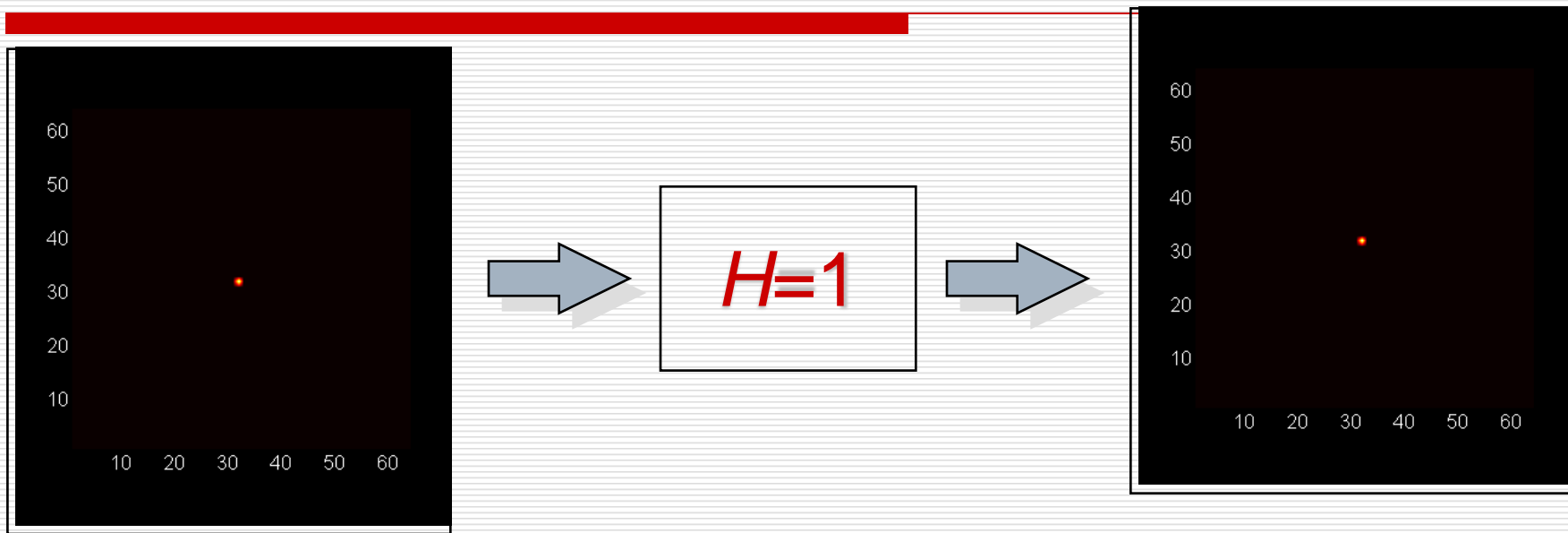
Áreas de aplicação

- Geofísica,
- Meteorologia
- Oceanografia
- Transferência de calor
- Espalhamento nuclear
- Biomagnetismo
- Imagens..

Conceitos Básicos

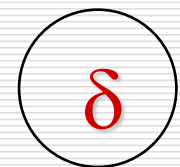
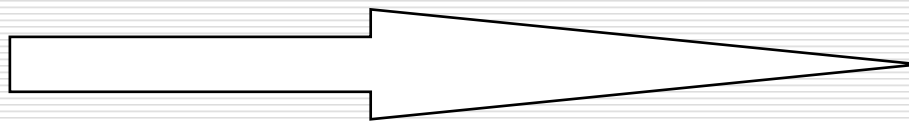


Resposta de um objeto pontual Sistema Ideal

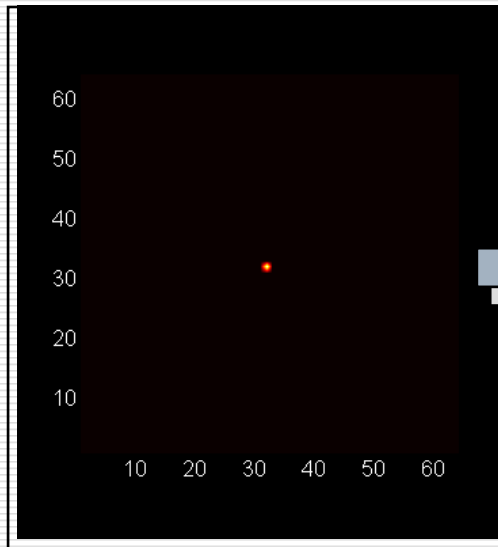


point object

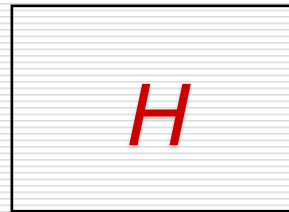
point imaging



Resposta a um objeto pontual Sistema Real



objeto pontual



"borramento"

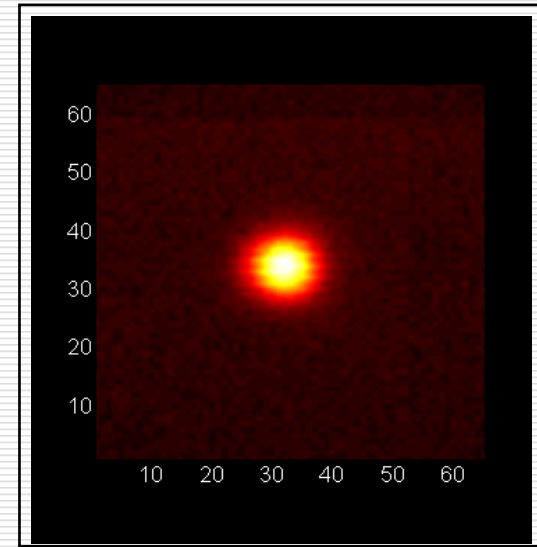
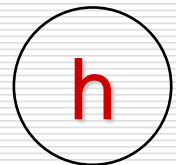
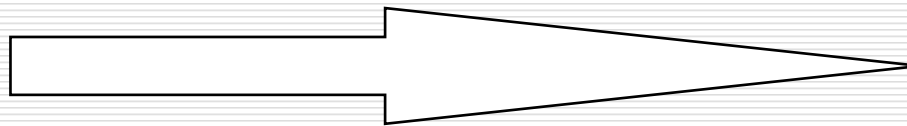
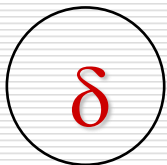


Imagem não pontual



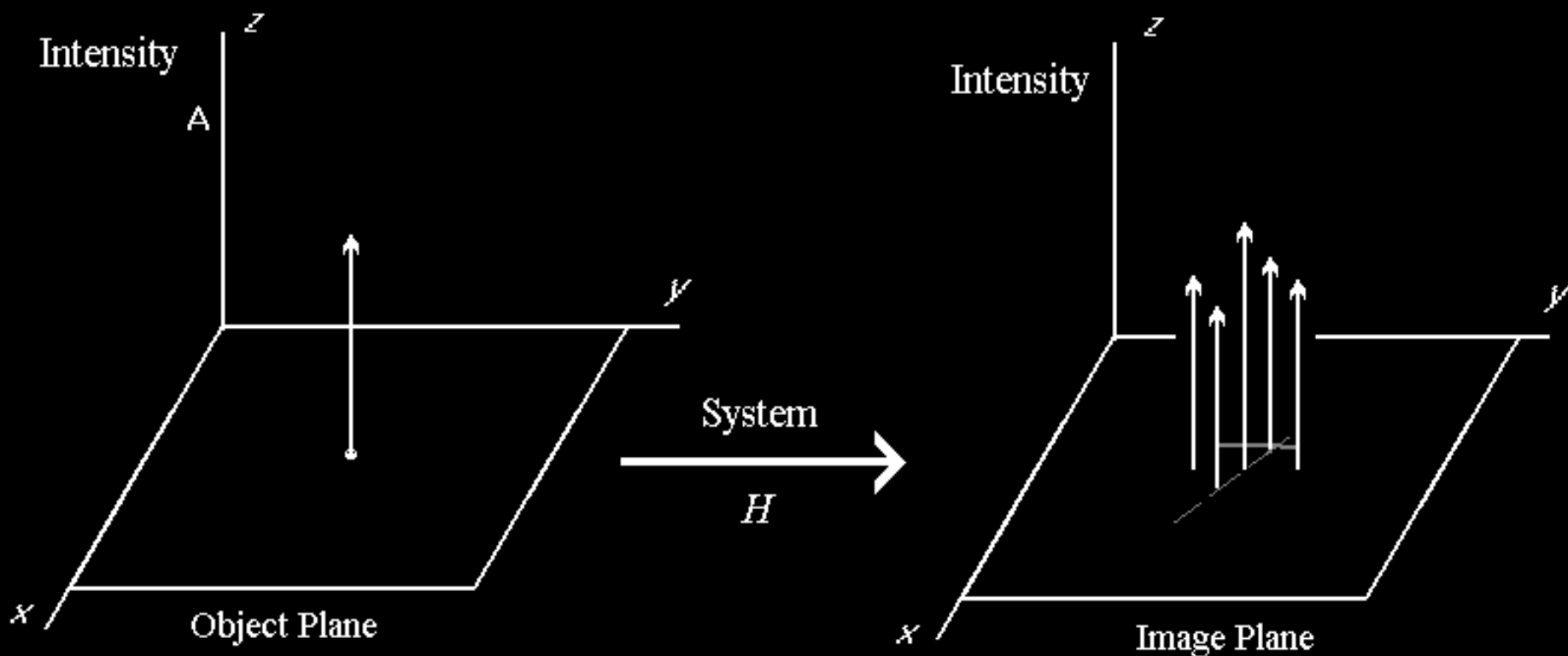
Resposta a um objeto pontual

$$h = H\{\delta\}$$

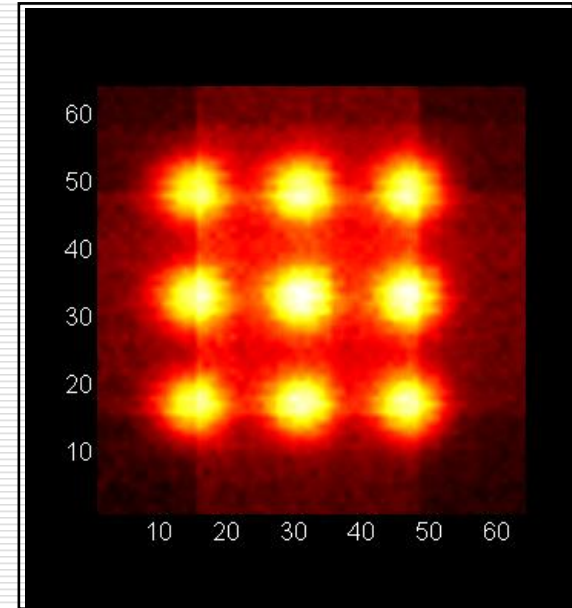
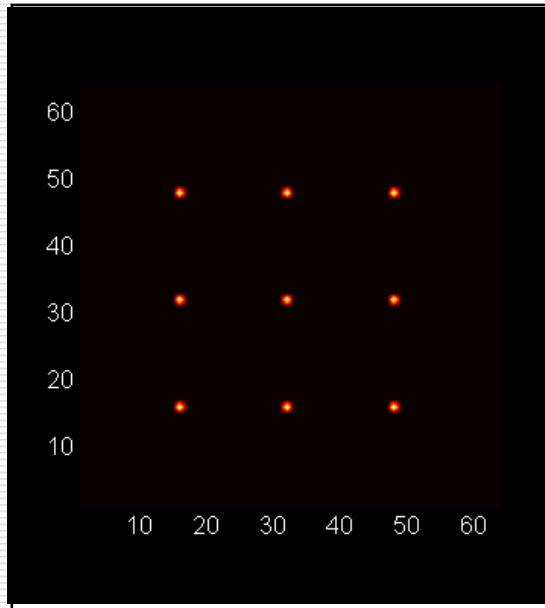
- h visualmente associa cada imagem de um ponto produzido por uma função ideal f um pequeno “borrão”.
- $h =$ “point spread function”

$$h \Rightarrow psf$$

Função Espalhamento de Ponto "Point Spread Function" -PSF



Borramento- Objeto Extenso



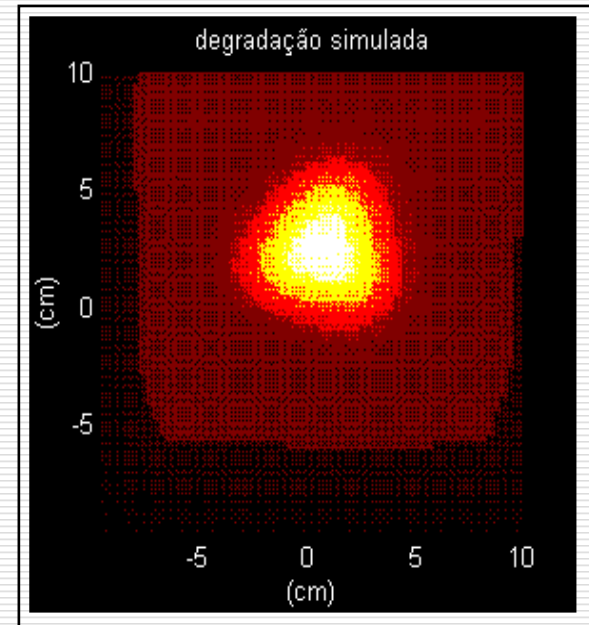
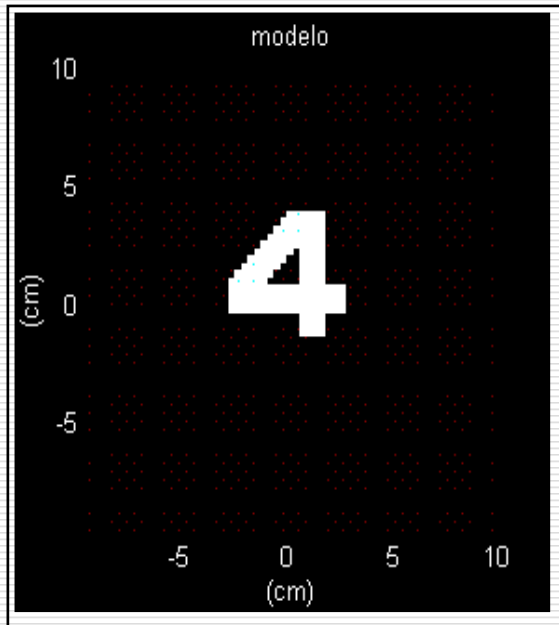
f



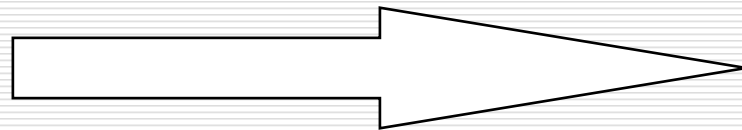
g

Borramento

Borramento - Objeto Extenso



f

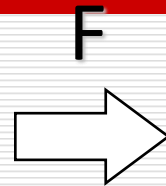


g

borramento

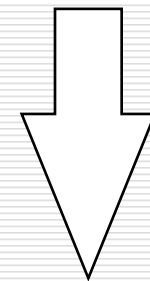
Determinar h^{-1} pode ser difícil

$$g = f * h$$



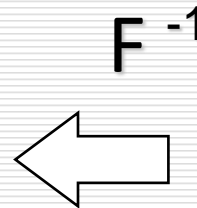
$$G = HF$$

$$H^{-1} = \frac{1}{H}$$



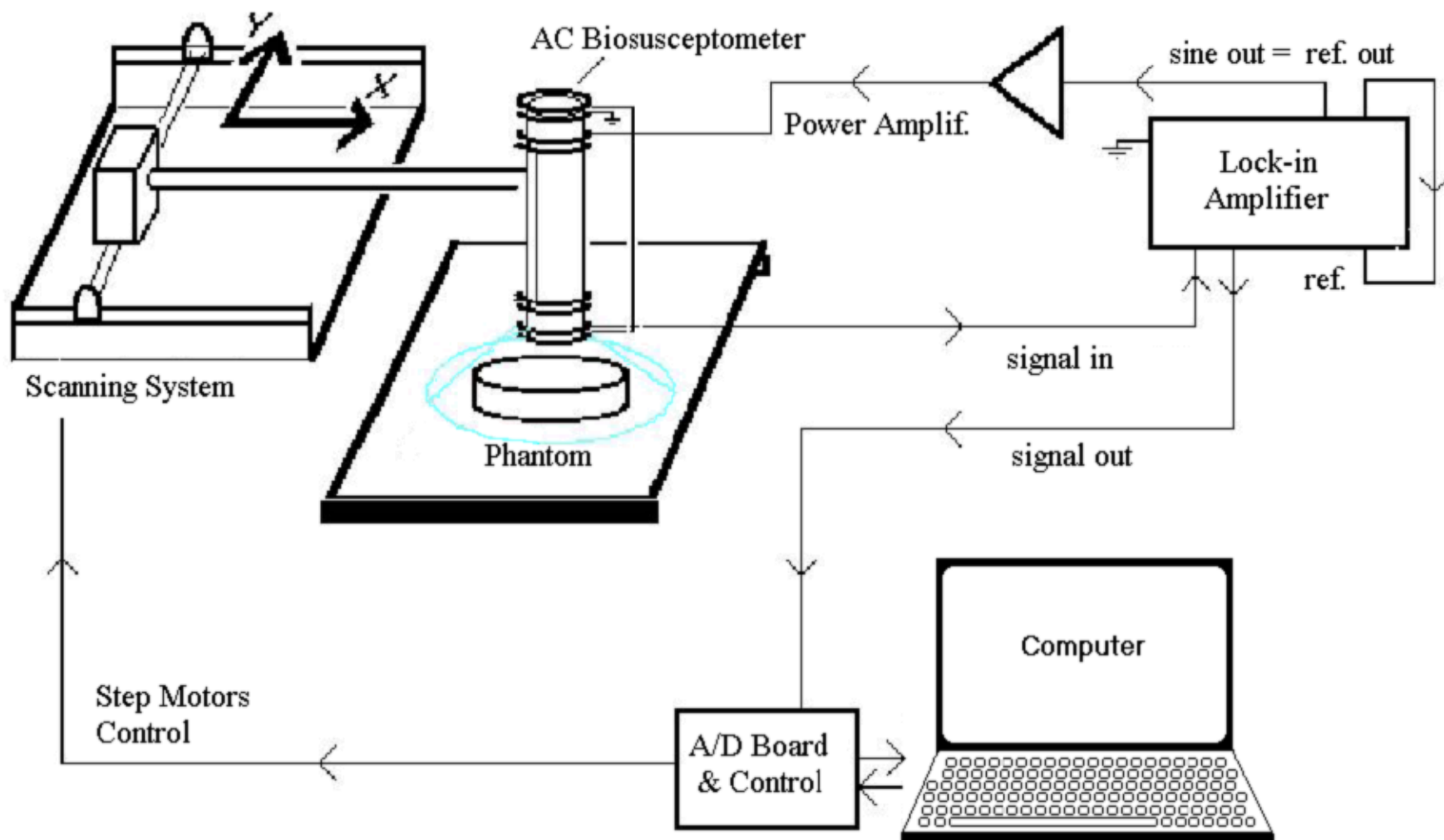
Inversão

$$f = g * h^{-1}$$

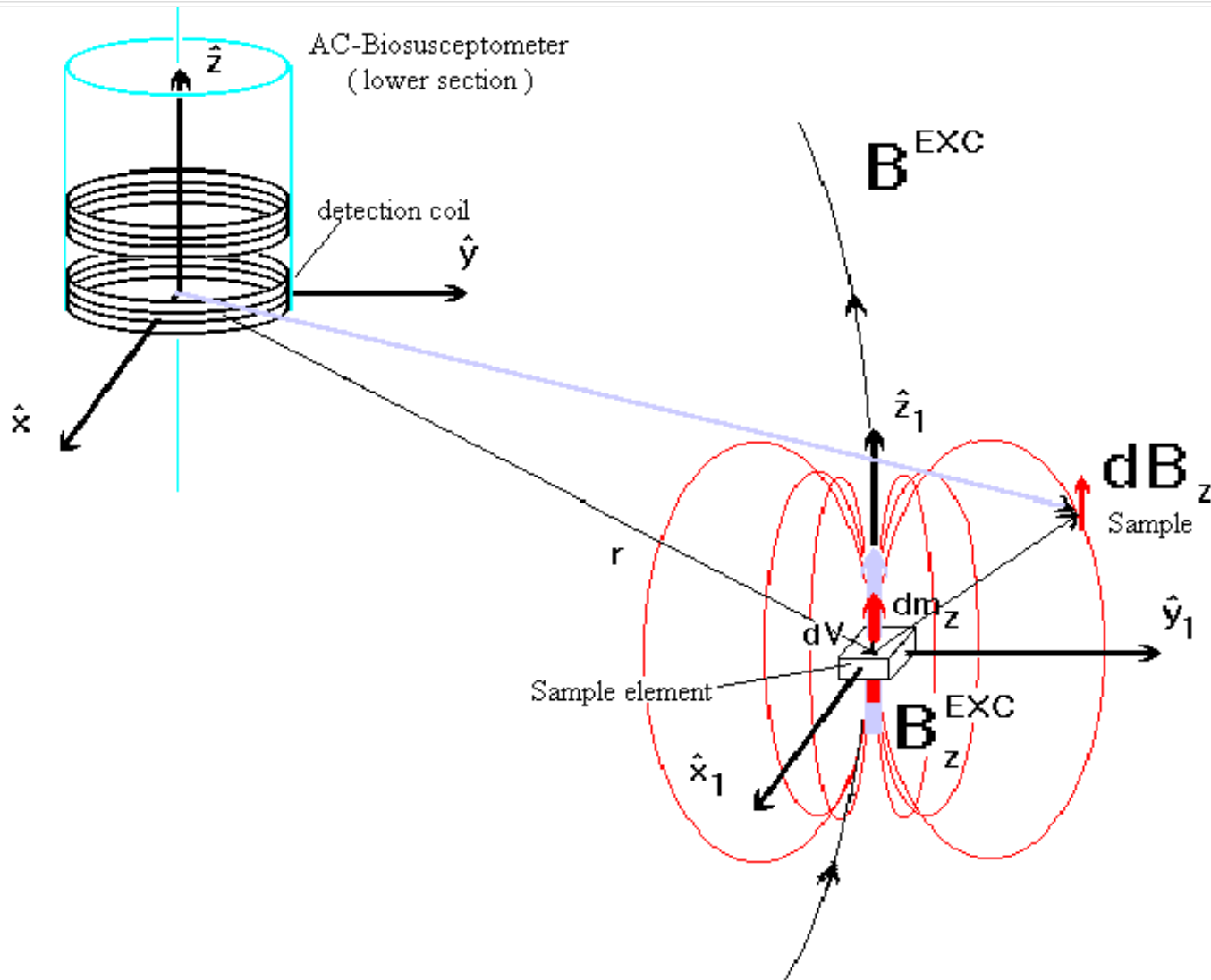


$$F = \frac{1}{H} G$$

Usando o BAC para gerar imagens de traçadores magnéticos



A contribuição de um volume elementar para o sinal magnético

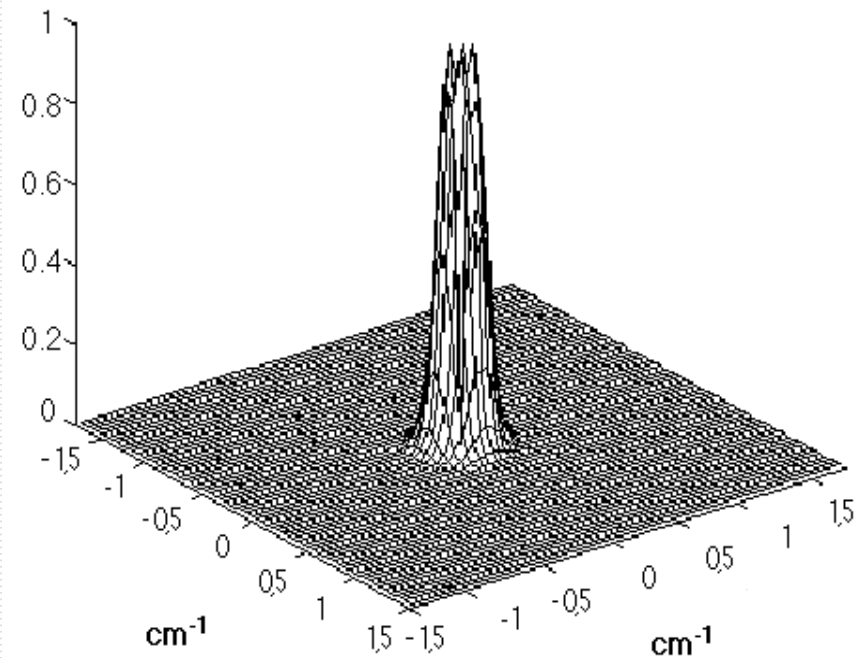
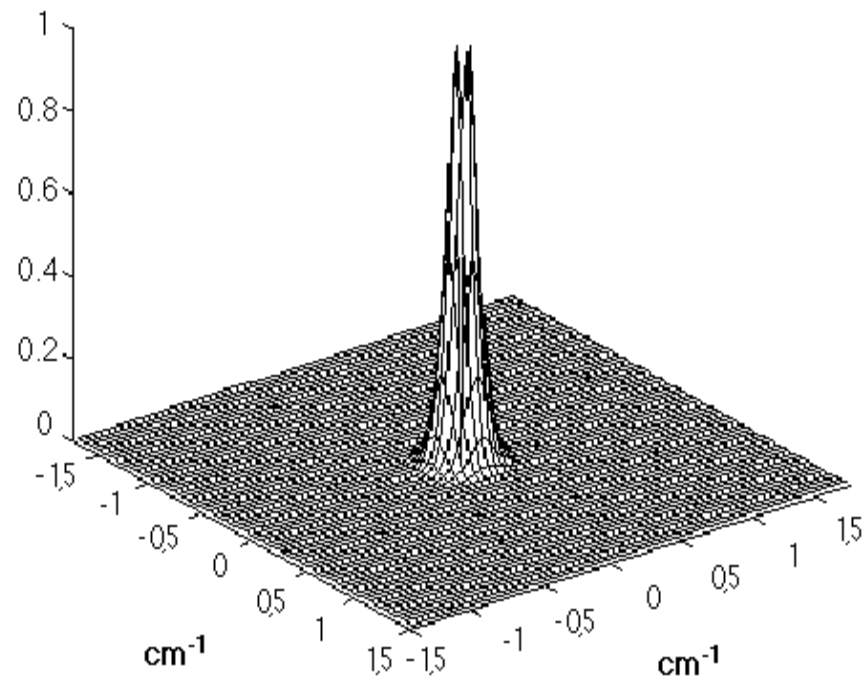


PSF

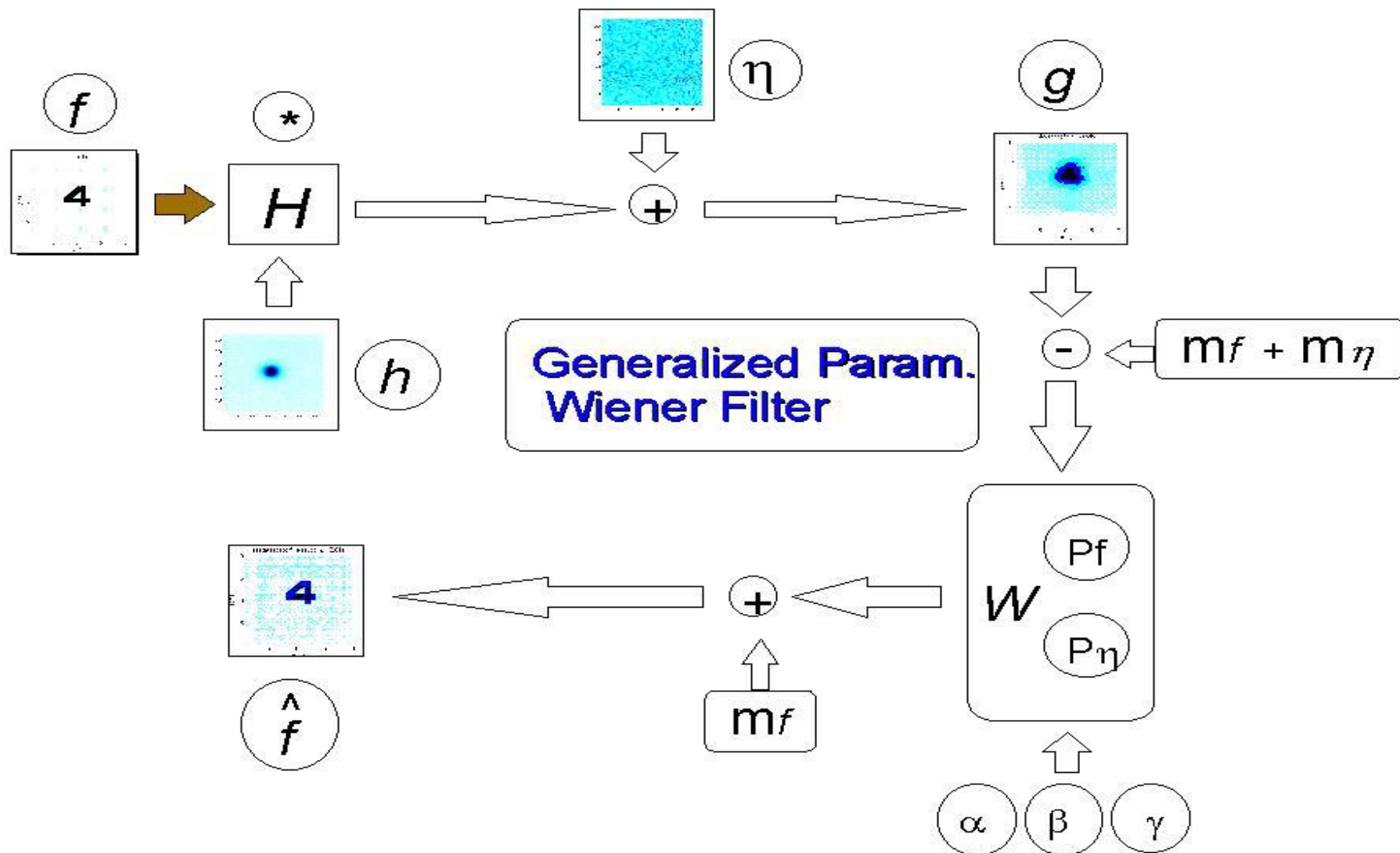
Teórica (L)

e

Experimental (R)



Esquema do processamento de sinal

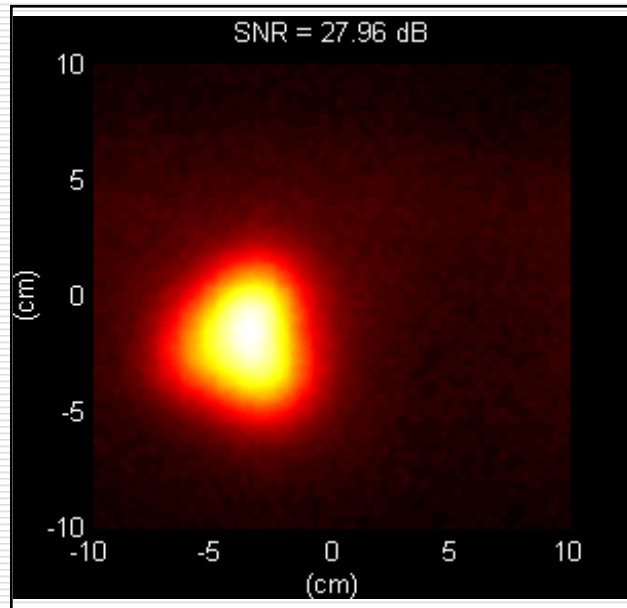


Filtro de Wiener

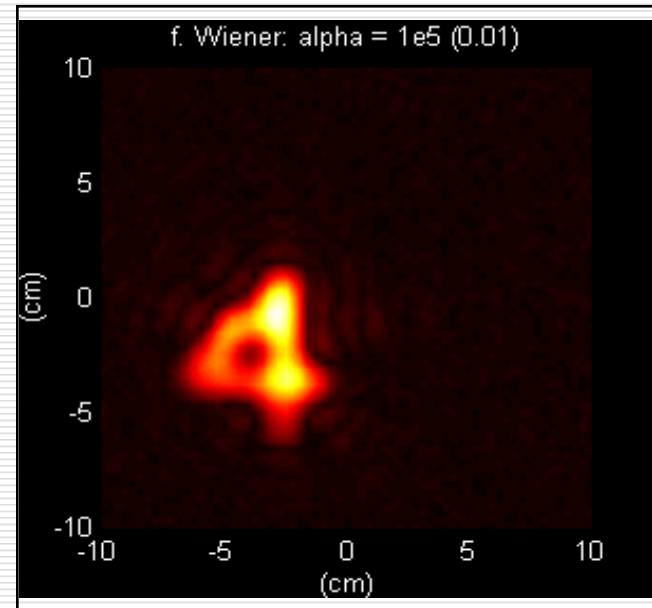
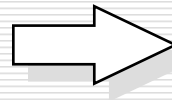
$$W[k_x, k_y] = \left(\frac{|H[k_x, k_y]|^2}{|H[k_x, k_y]|^2 + \alpha 10^{-S[k_x, k_y]/10}} \right)^\beta \cdot H_\gamma^{-1}[k_x, k_y],$$

where α and β are real parameters ($\alpha, \beta > 1$), $H_\gamma^{-1}[k_x, k_y]$ is the pseudo inverse filter, and $S[k_x, k_y] = 10 \cdot \log_{10}(P_f[k_x, k_y]/P_\eta[k_x, k_y])$ is an expectation of the S/N, where P_f is the power spectrum of the object and P_η is the power spectrum of the ambient noise.

Imagem restaurada pelo filtro de Wiener



W

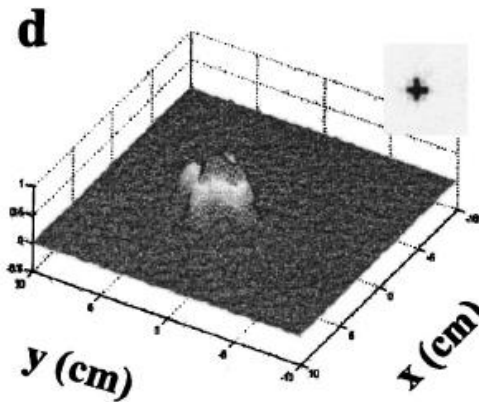
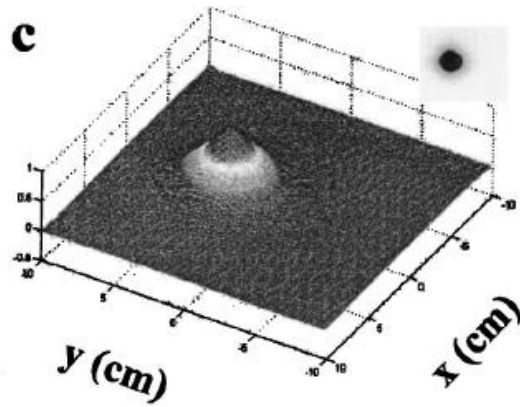
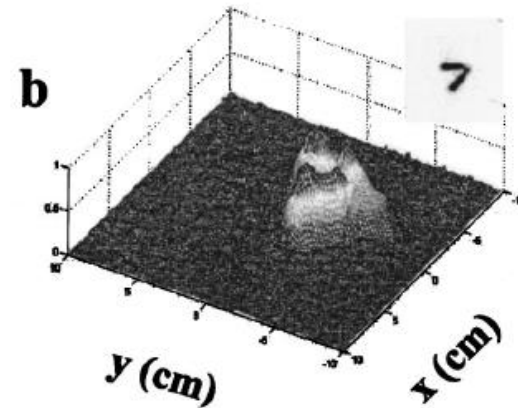
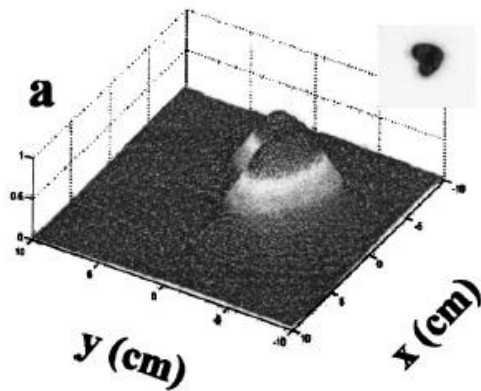


Degraded

Restored

M. Moreira, L.O. Murta Jr. and O. Baffa. "Imaging Ferromagnetic Tracers With an AC Biosusceptometer", *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 2532-2538, 2000.

Imagens brutas e restauradas



Bibliografia

- http://www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/Curso_PI_ELAC-2008-2.pdf
- Tomografia de Impedância Elétrica: Métodos Computacionais (Cód.129227741). Olavo Henrique Menin, Alexandre Souto Martinez, Vanessa Rolnik